

Sammanfattning av vad som har gjorts i andra halvan av kursen (dvs. efter duggan)

En sammanfattning av 1a halvan av kursen finns på kurshemsidan; se föreläsningen

1. Integrationssteknik

En sammanfattning av integrationssteknik (som är mer utförlig än denna) gjordes den 8/3, se anteckningar på kurshemsidan, så här är jag mycket kortfattad.

(a) Elementära funktioner vars integraler skall kunna beräknas:

- konstantfunktioner
- x^r
- e^x (med hjälp av logaritmlagar kan man då också integrera a^x där $a \neq e$)
- $\sin x$, $\cos x$
- $\frac{1}{1+x^2}$
- $\pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) Substitution och invers substitution

Obs! Om integralen är bestämd, dvs. har gränser, så glöm inte att substituera i gränserna. Om integralen är obestämd, dvs. utan gränser, så glöm inte att återsubstituera på slutet.

Med hjälp av invers subst kan man integrera $\tan x$

(c) Partiell integration

Kan vara användbart för att integrera produkten av två funktioner, och hjälper oss också att integrera $\ln|x|$ (och därmed alla logaritm-funktioner), $\arctan x$, $\arcsin x$ och $\arccos x$.

(d) Vid integration av rationella funktioner kan partialbråksuppdelning vara användbart.

(e) Vid integration av trigonometriska funktioner ($\sin$, $\cos$, $\tan$) kan man ha nytta av trigonometriska formler. Från följande tre kan mycket annat härledas:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Från detta följer t.ex. att $\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$, så

(3)

$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ där högerledet
är enkelt att integrera.

Kom också ihåg att $\sin(-x) = -\sin x$ och
 $\cos(-x) = \cos x$.

2. Tillämpningar av integration

(a) Redan före duggan betraktade vi
volymen av rotations kroppar kring
x- eller y-axeln. (Tabell finns på
sid. 397 i kursboken.)

(b) Volymberäkningar som kan göras med
hjälp av tvärsnitt vinkelräta mot en
axel/linje som går igenom kroppen:

Volymen $= \int_a^b A(x) dx$, där $A(x)$ är
arean av ett tvärsnitt genom kroppen som
skär axeln i punkten x , och där a och
 b är kroppens ändpunkter på axeln.

(c) Båglängd: Kurvan $y = f(x)$ från $x=a$ till $x=b$ har längden

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(d) Rotationsytor: Den yta som genereras då kurvan $y = f(x)$ från $x=a$ till $x=b$ roterar kring x -axeln är

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

3. Differentialekvationer

(a) Separabla ekvationer

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

löses genom "separation av variabler"

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

och integration

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx.$$

(5)

(b) En 1:a ordningens diff. ekv. på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

kallas homogen om $f(tx, ty) = f(x, y)$
 för alla $t \in \mathbb{R}$ (för vilket uttrycket är definerat).

I detta fall omvandlar substitutionen
 $y = xz$ (dvs. $z = \frac{y}{x}$), $\frac{dy}{dx} = z + x \frac{dz}{dx}$
 den homogena ekvationen till en
separabel ekvation, som kan lösas som i (a).

(c) En 1:a ordningens diff. ekv. på formen

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

kallas linjär och löses genom multiplik.
 av båda leden med s.k. integrerande
faktor $e^{\int p(x) dx}$, vilket ger

$$y'(x)e^{\int p(x) dx} + y(x)p(x)e^{\int p(x) dx} = q(x)e^{\int p(x) dx}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(y(x)e^{\int p(x) dx} \right) = q(x)e^{\int p(x) dx}$$

$$\Leftrightarrow \int y(x)e^{\int p(x) dx} = \int q(x)e^{\int p(x) dx} dx$$

integrations

varifrån $y(x)$ kan lösas ut.

(d) Reduktion av ordning: Om y inte förekommer i en 2a ordn. diff. ekv. där y är den obekanta funktionen, så omvandlar substitutionen $p = y'$ ekvationen till en 1a ordn. diff. ekv.

(e) En andra ordningens diff. ekv. på formen

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = r(x)$$
 kallar för linjär.

Om $r(x) = 0$ (konstant) och $y_1(x)$ och $y_2(x)$ är två linjärt oberoende lösningar, så ges den allmänna lösningen av

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

där c_1 och c_2 är godtyckliga konstanter.

(f) Fallet då $p(x) = p$, $q(x) = q$, $r(x) = 0$ är konstanta, dvs.

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

löses genom att lösa den karakteristiska

(7)

ekvationen $m^2 + pm + q = 0$.

- $m_1 \neq m_2$ reella rötter $\Rightarrow$

$y(x) = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$ är den allmänna lösningen.

- $m_1 = a + bi$, $m_2 = a - bi$, där $(a, b \in \mathbb{R})$ är två icke-reella rötter $\Rightarrow$

$y(x) = e^{ax} (c_1 \cos(bx) + c_2 \sin(bx))$ är den allmänna lösningen.

- m är den enda lösningen (en dubbelrot)

$\Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{mx}$ är den allmänna lösningen.

(9) Särskilda/speciella lösningar, som uppfyller s.k. "begynnelsevillkor", tex. $y(0) = 1$, $y'(1) = 2$, får genom att bestämma konstanten, eller konstanterna c_1 och c_2 , så att begynnelsevillkoren blir uppfyllda.

(8)

(h) Funktioner, i differentialekvationer tex., kan benämnas med andra symboler än 'y' och deras variabel kan benämnas med andra symboler än 'x'.

(Exempelvis: $mv'(t) + \lambda v(t) = 0$ där 'v' är den obekanta funktionen, med variabel 't'.)

4. Serier

Givet en serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ vill man gärna avgöra om den är konvergent/divergent, och detta är oberoende av om man tar bort eller lägger till ändligt många termer i början.

(a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent så $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(b) En geometrisk serie $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ är konvergent med värdet $\frac{a}{1-r}$ om $|r| < 1$ och divergent annars.

(9)

(c) Integraltestet: $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ är konvergent om och endast om $\int_m^{\infty} f(x) dx$ är konvergent.

(Förutsatt att $f(x) \geq 0$ för alla tillräckligt stora x).

(d) Integraltestet $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ är konvergent om $r > 1$ och divergent annars.

Låt 'f.a.t.s.' betyda 'för alla tillräckligt stora'.

(e) Jämförelsetestet: Låt K vara en konstant.

Om $0 \leq a_n \leq K b_n$ f.a.t.s. n , så:

• $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

(f) Kvotjämförelsetestet:

Om $a_n > 0$, $b_n > 0$ f.a.t.s. n så

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ och } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ konvergent} \\ \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \text{ och} \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ divergent} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

(g) Kvottestet:

Om $a_n > 0$ f.a.t.s. n , så

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent.}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in (1, \infty) \cup \{\infty\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent.}$$

(h) Rottestet:

Som kvottestet om man byter $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
mot $(a_n)^{\frac{1}{n}}$ (vilket är samma som $\sqrt[n]{a_n}$).

(i) Begreppen absolut och beringad konvergens.

• $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutkonvergent $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

• Alternierande serier:

Om följande tre saker gäller så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent:

1) $a_n a_{n+1} < 0$ f.a.t.s. n ,

2) $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ f.a.t.s. n , och

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(j) Multiplikation med konstant, och addition.

• Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$,

så $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$, och $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c A$.

• Om den ena serien är konvergent och den andra divergent så är $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ divergent.

5. Potensserier

(12)

(a) Om $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

så har $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergensradien

$$R = \frac{1}{L} \quad (\text{där } \frac{1}{0} = \infty \text{ och } \frac{1}{\infty} = 0),$$

och konvergerar sökunda för alla $x \in (c-R, c+R)$.

(b) Taylorserien för f kring $x=c$ är

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!} (x-c)^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!} (x-c)^3 + \dots$$

(Om $c=0$ så kallar samma serie också för Maclaurnserien för f .)

(c) Om $R > 0$ och $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ konvergerar

mot $f(x)$ för alla $x \in (c-R, c+R)$ så

$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$ för $n=0, 1, 2, \dots$, dvs. den givna serien är Taylorserien för f kring c .

(d) Deriverbarhet och integrerbarhet
av funktioner som beskrivs av potensreder:

Om $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ för alla

$x \in (c-R, c+R)$ där $R > 0$ så

• $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$, och

• $\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1} + C$

för alla $x \in (c-R, c+R)$.

(e) Om $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ och $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$ har

konvergensträdier R_a resp. R_b och $R = \min(R_a, R_b)$
så

• $\sum_{n=0}^{\infty} K a_n (x-c)^n = K \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ för alla $x \in (c-R_a, c+R_a)$,

• $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x-c)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n$

och $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n \right)$

för alla $x \in (c-R, c+R)$, där $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.