

Något om 'ln x' och 'ln|x|'

①

Som bekant är $\ln x$ definierad för $x > 0$, men inte för $x \leq 0$. Det följer att $\ln|x|$ är definierad om $x \neq 0$.

Vi vet att $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ och

$$\frac{d}{dx} |x| = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x > 0 \\ -1 & \text{om } x < 0. \end{cases}$$

(Kom ihåg att $|x|$ inte är deriverbar i $x=0$.)

Med kedjeregeln följer att

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{1}{|x|} \operatorname{sgn}(x) = \frac{1}{x} \quad \text{för alla } x \neq 0.$$

Alltså är $\ln|x|$ en antiderivata (primitiv funktion) till $\frac{1}{x}$ för alla $x \neq 0$, så

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

Om man begränsar sig till $x > 0$ så gäller givetvis $\int \frac{1}{x} = \ln x + C$. Men som vi nu

(2)

har sett så kan likheten generaliseras till alla $x \neq 0$ om vi byter ' $\ln x$ ' mot ' $\ln|x|$ ': $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$.

Detta är användbart tex. när man löser differentialekvationer och gärna vill ha lösningar på så stora intervall som möjligt.

Sammanfattning av integrationssteknik

Grundläggande integraler/antiderivator
(måste kunna):

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad \text{om } r \neq -1.$$

$$\int a dx = ax + C \quad \text{om } a \text{ är en konstant.}$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C.$$

(3)

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C = \sin^{-1} x + C.$$

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C = \cos^{-1} x + C.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C = \tan^{-1} x + C.$$

Grundläggande räkneregler:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \text{ om } a \text{ är en konstant.}$$

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Substitution:

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \boxed{\begin{array}{l} t = g(x) \\ \frac{dt}{dx} = g'(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array}} = \int f(t) dt$$

$$= F(t) + C = F(g(x)) + C, \text{ om } F' = f.$$

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \boxed{\begin{array}{l} t = g(x) \\ \frac{dt}{dx} = g'(x) \\ dt = g'(x) dx \end{array}} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt.$$

Invers substitution:

$$\int f(x) dx = \boxed{\begin{array}{l} x = g(t) \\ \frac{dx}{dt} = g'(t) \\ dx = g'(t) dt \end{array}} = \int f(g(t)) g'(t) dt =$$

$$= H(t) + C = \boxed{t = g^{-1}(x)} = H(g^{-1}(x)) + C,$$

om $H'(t) = f(g(t))g'(t)$.

$$\int_a^b f(x) dx = \boxed{\text{som}} = \int_{g'(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) g'(t) dt.$$

Exempel Nu kan vi integrera $\tan x$.

$$\int \tan x dx = \boxed{\begin{array}{l} x = \arctan t \\ \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1+t^2} \\ dx = \frac{1}{1+t^2} dt \end{array}} = \int \frac{\tan(\arctan t)}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{t}{1+t^2} dt = \boxed{\begin{array}{l} u = 1+t^2 \\ \frac{du}{dt} = 2t \\ du = 2t dt \end{array}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln|u| + C = \boxed{u = 1+t^2} = \frac{1}{2} \ln|1+t^2| + C$$

$$= \boxed{t = \tan x} = \frac{1}{2} \ln|1+\tan^2 x| + C$$

$$\left(= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1}{\cos^2 x} \right| + C \right).$$

Obs! Med hjälp av substitution rå kan vi integrera många smärre variationer av de elementära funktionerna x^r , $\ln x$, e^x , $\sin x$ och $\cos x$:

Exempel. $\int \frac{1}{\sqrt{\pi - x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^2}} dx$

$$= \boxed{\begin{array}{l} t = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} dx \end{array}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t + C$$

$$= \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right) + C.$$

Exempel $\int e^{5x} dx = \boxed{\begin{array}{l} t = 5x \\ \frac{dt}{dx} = 5 \\ dx = \frac{1}{5} dt \end{array}} = \int \frac{1}{5} e^t dt$

$$= \frac{1}{5} e^t + C = \frac{1}{5} e^{5x} + C.$$

(I det sista exemplet är det även relativt lätt att direkt se vad integralen är, genom att tänka på kedjeregeln "baktänges".)

Partiell integration:

6

$$\int F(x) G'(x) dx = F(x) G(x) - \int F'(x) G(x) dx.$$

Exempel Nu kan vi integrera $\ln|x|$,
 $\arcsin x$, $\arccos x$ och $\arctan x$.

$$\int \ln|x| dx = \int \underbrace{1}_{G'} \underbrace{\ln|x|}_F dx = \underbrace{x}_G \underbrace{\ln|x|}_F$$

$$- \int \underbrace{x}_G \underbrace{\frac{1}{x}}_{F'} dx = x \ln|x| - x + C$$
$$= x(\ln|x| - 1) + C$$

$$\int \arctan x dx = \int \underbrace{1}_{G'} \underbrace{\arctan x}_F dx =$$

$$\underbrace{x}_G \underbrace{\arctan x}_F - \int \underbrace{x}_G \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{F'} dx = \boxed{\text{se exempel
eter 'invers
substitution'}}$$

$$= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + C.$$

($\int \arccos x dx$ beräknas i (lösningen) till Diagnostiskt
prov 5, och på liknande sätt beräknas
 $\int \arcsin x dx$.)

Som synes är partiell integration att tänka på när funktionen som skall integreras är en produkt av två funktioner och substitution inte ser ut att hjälpa.

Exempel $\int x^2 \sin^2 x \, dx$ (som beräknas i anteckningar från tidigare föreläsning).

Rationella funktioner och partialbräksuppdelning:

Antag att vi vill beräkna $\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx$ där p och q är polynom.

Om graden av p är minst lika stor som graden av q , så dividera p med q så att man får $\frac{p(x)}{q(x)} = k(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$ och

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} \, dx = \int k(x) \, dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} \, dx$$

där k och r är polynom och r har lägre grad än q .

(8)

Om p redan har lägre grad än q ,
 så faktorisera q i 1a-gradsfaktorer
 och 2a-gradsfaktorer utan reella nollställen
 och samla ihop likadana faktorer:

$$q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdots (x-a_k)^{m_k} \cdot (r_1(x))^{n_1} \cdots (r_l(x))^{n_l}$$

(där $r_i(x)$, $i=1, \dots, l$ har grad 2).

$\frac{p(x)}{q(x)}$ är då lika med en summa av
 termer, där varje $(x-a_i)^{m_i}$, $i=1, \dots, k$,
 motsvaras av (eller 'ger upphov till') termer

$$\frac{A_{i,1}}{(x-a_i)} + \frac{A_{i,2}}{(x-a_i)^2} + \dots + \frac{A_{i,m_i}}{(x-a_i)^{m_i}}$$

och varje $(r_i(x))^{n_i}$, $i=1, \dots, l$,
 motsvaras av termer

$$\frac{B_{i,1}x + C_{i,1}}{r_i(x)} + \frac{B_{i,2}x + C_{i,2}}{(r_i(x))^2} + \dots + \frac{B_{i,n_i}x + C_{i,n_i}}{(r_i(x))^{n_i}}.$$

(9)

Om $n_1 = n_2 = \dots = n_l = 1$, så

förenklas det senare till 1

$$\frac{B_i x + C_i}{x_i(x)} \quad (\text{bara en term})$$

och då kan integralen $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, via sin partialbråksuppdelning, beräknas med metoder som redan har nämnts. (efter att man har bestämt konstanterna).

Om $n_i > 1$ för något av $i = 1, \dots, l$, så kan det hända att man får en term som man inte klarar av att integrera med metoderna från kursen. (Med den s.k. 'Hermites metod' som vi inte går igenom kan dock även sådana integraler beräknas.)

Exempel

$$\frac{x^4 + x^3 - x + 2}{(x-1)(x+2)^2(x^2+1)^2(x^2+x+1)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_{2,1}}{x+2} + \frac{A_{2,2}}{x+2} + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2+1}$$

$$+ \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+1)^2} + \frac{B_{2,1}x + C_{2,1}}{x^2+x+1}.$$