Introduktion

En differentialekvation är en ekvation där den obekant (det sökta) objektet är en funktion (i stället för ett tal) och ekvationen involverar denna funktion, dess (möjligen partiella) derivator samt funktionens variabel (eller variabler).

En differentialekvation kallas för ordinär om den obekanta är en funktion av en variabel.

En differentialekvation kallas för partiell om den obekanta är en funktion av flera variabler (och differentialekvationen involverar då partiella derivator).

En differentialekv. behöver inte ha någon lösning, och för de diff.ekv. som har lösn. så finns ingen allmän metod för att finna lösningen.

Men för vissa typer av diff.ekv så finns metoder för att finna lösningar. Dessa typer av diff.ekv är av intresse eftersom de ofta uppstår när man försöker lösa fysikaliska problem.

Def. Ordningen för en ordinär diff.ekv. är ordningen av den högsta derivatan som förekommer i ekv.

Exempel $2y' + y + 3x = 0$

har ordning 1.

$y'' + 3y + yx = \cos x$

har ordn. 2.

Vi kommer att betrakta ordinära diffar av första och andra ordningen.

Vi börjar med första ordningen.

Separabla ekvationer

Definition En diff. ekv. av första ordningen kallas för separabel om den kan skrivas på formen

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

där f inte beror på y och g inte beror på

Exempel Betrakta ekv.

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = xy$$

Den är separabel för vi kan låta $f(x) = x$ och $g(y) = y$.

Vi löser den på följande sätt.

Omskrivning av (1) ger

(2) $$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x$$

Kedjeregeln för derivering ger

(3) $$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{y}\,dy\right) = \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

(för vi betraktar y och $\int \frac{1}{y}\,dy$ som funktioner av x så om $F(y) = \int \frac{1}{y}\,dy$ och $G(x) = F(y(x))$ så ger kedjeregeln att $G'(x) = F'(y(x))\cdot y'(x) = \frac{1}{y(x)}\cdot y'(x)$).

Från (2) och (3) får vi

(4) $$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{y}\,dy\right) = x$$

Så integration med avseende på x ger

(5) $$\int \frac{1}{y}\,dy = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + A$$

Eftersom $\int \frac{1}{y}\,dy = \log|y| + B$ så får vi

$$\log|y| = \frac{x^2}{2} + C$$

för en konstant C. Detta ger

$$|y| = e^C e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Om vi sätter $D = \pm e^C$ så får vi

$$y = De^{\frac{x^2}{2}}$$

som är den allmänna lösningen till ekvationen (1) (dvs. $y(x)$ är en lösn. till (1) $\Leftrightarrow$ $y(x) = De^{\frac{x^2}{2}}$ för någon konstant D.)

<u>Generell metod för att lösa separabla ekvationer</u>:

Givet

(1) $$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$$

så notera att kedjeregeln och (1) ger

$$\frac{d}{dx}\left(\int \frac{1}{g(y)}\,dy\right) = \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = f(x).$$

Integration m.a.p. x ger nu

$$(2) \qquad \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

Minnesregel: Vi började med

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y).$$

Genom "multiplikation med dx" och division med $g(y)$ får vi

$$\frac{1}{g(y)} \cdot dy = f(x)\,dx.$$

Om vi sedan lägger till integraltecken och integrationskonstant så får vi

$$\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C$$

vilket är (2).

Punkt (2) innebär att en separabel ekv. alltid har en lösn., men i praktiken kan integrationerna vara svåra (eller i viss mening omöjliga) att utföra.

Exempel Lös ekv.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Denna är separabel för vi kan låta $f(x) = -x$ och $g(y) = \frac{1}{y}$.

$$y\,dy = -x\,dx$$

$$\int y\,dy = -\int x\,dx + C$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$$

Om vi låter $D = 2C$ så får vi

$$x^2 + y^2 = D.$$

Här har vi inte givit y explicit som en funktion av x, utan lösningen (som inte innehåller några derivator) kallas för implicit.

Explicita lösningar ges av:

$y_{D+}(x) = \sqrt{D - x^2}$

$y_{D-}(x) = -\sqrt{D - x^2}$, för $-D \leq x \leq D$.

Den implicita lösningen

$$x^2 + y^2 = D$$

representerar en familj av kurvor, nämligen alla cirklar centerade i origo. Man säger att varje kurva i familjen är en lösn. till ekvationen $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.