Serier

Låt m vara ett heltal och låt

$$a_m,\ a_{m+1},\ a_{m+2},\ \dots$$

vara en oändlig talföljd. Denna kan också betecknas med notationen

$$\{a_n,\ m = m, m+1, m+2, \dots\}.$$

Uttrycket

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n ,$$

eller alternativt

$$a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \dots$$

kallas för en (oändlig) serie.

Exempel på oändliga serier, uttryckta på två sätt:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n$, alternativt $1 + 2 + 3 + \dots$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, alternativt $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$

3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, alternativt

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots$$

Nu behöver vi definitionen av gränsvärde av en talföljd och (av) konvergent talföljd, som ni finner i kap. 9.1 i kursboken, och i mina föreläsningsanteckningar från föreläsningarna 1-3.

Låt $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ vara en serie och låt

$$S_N = a_m + a_{m+1} + \dots + a_N = \sum_{n=m}^{N} a_n$$

för $N = m, m+1, m+2, \dots$.

<u>Definition</u>. Vi säger att serien $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ är <u>konvergent</u> (mot A) om talföljden

S_N, $N = m, m+1, m+2, \dots$ konvergerar mot A, dvs. om $\lim_{N\to\infty} S_N = A$.

I annat fall, dvs. om $\lim_{N\to\infty} S_N = \pm\infty$ eller om $\lim_{N\to\infty} S_N$ inte existerar alls (vare sig som reellt tall eller $\pm\infty$) så säger vi att $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ är <u>divergent</u>.

<u>Övn/exempel</u> Förklara för er själva varför följande serier är divergenta.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 3) $\sum_{n=7}^{\infty} \frac{2^n+1}{2^n}$.

<u>Geometriska serier</u>

En serie $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ där

$a_n = ar^n$ och $a, r \in \mathbb{R}$, kallas för <u>geometrisk serie</u>.

<u>Exempel</u> $\sum_{n=0}^{\infty} 5\cdot 2^n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

är geometriska serier.

Om $S_N = ar^0 + ar^1 + \ldots + ar^N$

för $N = 0, 1, 2, \ldots$ så

$$(1-r)S_N = ar^0 + ar^1 + \ldots + ar^N$$
$$- ar^1 - \ldots - ar^N - ar^{N+1}$$
$$= a - ar^{N+1} = a(1-r^{N+1})$$

och $S_N = \dfrac{a(1-r^{N+1})}{1-r}$.

Det följer att

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{a(1-r^{N+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

<u>om</u> $a = 0$ eller $|r| < 1$. I övriga fall så kan $\lim_{N\to\infty} S_N$ vara $\pm\infty$ eller ej existera.

Det följer att $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ konvergerar mot $\dfrac{a}{1-r}$ om $a = 0$ eller $|r| < 1$ och i övriga fall är serien divergent.

Övn./Ex. Systemet 'fractional reserve banking' med 'reservkvot' $0 < r < 1$ innebär att om en bank tar emot a kronor som insättning av någon, så kan banken, medan pengarna är insatta, låna ut $(1-r)a$ kronor till allmänheten (eller andra banker).

Antag att reservkvoten är 10%, dvs $r = \frac{1}{10}$. Antag att vid en viss tidpunkt så är alla banker tomma och allmänheten har sammanlagt 1000 kronor. Ange en minsta övre gräns för antalet kronor som sammanlagt kan komma i omlopp i samhället genom in och utlåning till/från banker under givna förutsättningar.

(Om banker inte kan skapa mynt/sedlar själv, så innebär systemet att de kan ge lån i form av något annat som värderas i kronor, till exempel elektroniska pengar, dvs. siffror i en dator, eller "värdepapper"!)

<u>Anmärkning</u> Uttrycket '$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$'

betecknar strängt taget två saker, dels en 'formel' summa, oavsett om den är konvergent eller inte, och dels ett tal, gränsvärdet $\lim_{N \to \infty} \sum_{n=m}^{N} a_n$, om serien är konvergent.

Här följer några grundläggande satser om serier och konvergens.

<u>Sats 1</u> Låt $a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ vara en talföljd och låt $M \geq m$ vara ett heltal. Då är $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergent om och endast om $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ är konvergent.

Med andra ord så har det ingen betydelse för konvergensen om man struntar i ändligt många termer i början, eftersom dessa bara bidrar med en ändlig kvantitet till totalsumman.

<u>Sats 2.</u> Om $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ är konvergent

så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Bevis.</u> Låt $S_N = \sum_{n=m}^{N} a_n$ för $N = m, m+1, \ldots$.

Antag att $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ är konvergent, så

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_{N-1} = s \text{ för något } s \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $S_n - S_{n-1} = a_n$, så

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$

$$= s - s = 0.$$ (Notera att vi använde en 'räkne-regel' för konvergenta talföljder.)

<u>Anmärkning</u> Det kan dock hända att $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ är divergent även om $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exempel på detta kommer upp så småningom.

Med hjälp av räkneregler för talföljder är det rättframt att bevisa följande:

Sats 3. Antag att serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerar mot A respektive B.
Då gäller att

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ konvergerar mot $A \pm B$.

(2) för varje konstant c så konvergerar $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ mot cA.

Sats 4. Om en av serierna $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, men den andra divergent, så är $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ divergent.

(Men om båda serierna är divergenta så kan det ändå hända att $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ är konvergent.)

Integraltestet

Integraler och serier är relaterade till varandra pga att integraler kan definieras med hjälp av Riemannsummor. Detta släktskap har betydelse för konvergensen/divergensen av serier.

Antag att f är kontinuerlig, icke-negativ och icke-växande på intervallet $[M, \infty)$ där M är en heltal.

<u>Problem</u>: Är serien $\sum_{n=M}^{\infty} f(n)$ konvergent?

Svaret beror naturligtvis på vad f är, men det har alltid en relation till om integralen $\int_M^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent eller divergent.

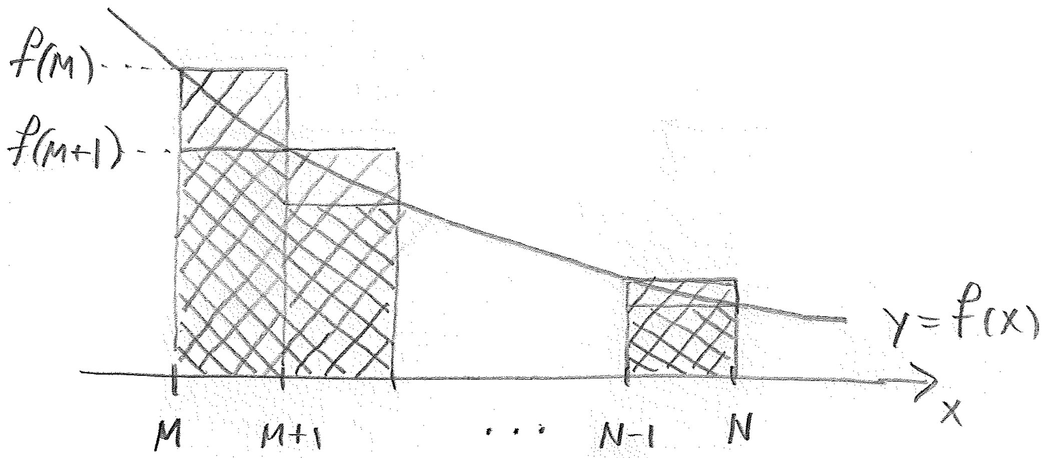
För varje heltal $N > M$, definierar vi

$$S_N^+ = \sum_{n=M}^{N-1} f(n) \quad \text{och} \quad S_N^- = \sum_{n=M+1}^{N} f(n).$$

Pga av antagandena om f så

$$S_N^- \leq \int_M^N f(x)\,dx \leq S_N^+ .$$

Se figur nedan:



S_N^- är lika med de arean av de nitiga staplarna, och S_N^+ är lika med arean av de höga staplarna. $\int_M^N f(x)\,dx$ är lika med arean under kurvan $y = f(x)$, över x-axeln och mellan linjerna $x = M$ och $x = N$.

Antag att $\int_M^\infty f(x)\,dx$ är konvergent, så

$$\int_M^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_M^N f(x)\,dx = r \in \mathbb{R}.$$

Eftersom $S_N^- \leq \int_M^N f(x)\,dx$ för alla $N = M+1, M+2, \ldots$

så följer att följden

$$S_N^-, \quad N = M+1, M+2, \ldots$$

har en övre gräns. Eftersom $S_N^- \le S_{N+1}^-$ för alla $N = M+1, M+2, \ldots$ så följer från en sats från föreläsningarna 1-3 (eller Theorem 2, kap. 9.1 i kursboken) att följden S_N^-, $N = M+1, M+2, \ldots$ är konvergent, dvs. $\sum_{n=M}^{\infty} f(n)$ är konvergent.

Vi har visat att om $\int_M^{\infty} f(x)\,dx$ är konvergent så är även $\sum_{n=M}^{\infty} f(n)$ konvergent.

Om $\sum_{n=M}^{\infty} f(n)$ är konvergent så följer från $\int_M^N f(x)\,dx \le S_N^+$ (för alla $N = M+1, M+2, \ldots$) att

$$\int_M^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_M^N f(x)\,dx \le \lim_{N\to\infty} S_N^+ = r$$

för något reellt tal r. Så, om $\sum_{n=M}^{\infty} f(n)$

är konvergent så är även $\int_M^\infty f(x)\,dx$ konvergent. Pga Sats 1 så kan dessa resultat sammanfattas med lite generellare antaganden, så här.

Sats 5. Antag att $m \le M$ är heltal och att f är definierad på $[m, \infty)$. Antag dessutom att f är kontinuerlig, icke-negativ och icke-växande på $[M, \infty)$. Då är $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ konvergent om och endast om $\int_M^\infty f(x)\,dx$ är konvergent.

Följdsats

a) Om $r \le 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ divergent.

b) Om $r > 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ konvergent.

Följdsatsen bevisas med hjälp av Sats 5 som kallas "integraltestet".