

Serier (Forts.)

①

Det finns fler "konvergenstester" än integraltestet.

Sats 6. Antag att $a_1, a_2, a_3, \dots$

och $b_1, b_2, b_3, \dots$ är följderna och $K > 0$

en konstant och att $0 \leq a_n \leq K b_n$

för alla $n = 1, 2, 3, \dots$.

(a) Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent så är även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent

(b) Om $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent så är även $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Beweis.

Som i beviset av "integraltestet" (Sats 5 i föregående anteckningar) så använder man satsen som säger att varje talföljd som är icke-avtagande och har en övre begränsning är konvergent.

(2)

Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent så är, enligt

Sats 3 (i föregående anteckningar), även

$\sum_{n=1}^{\infty} K b_n$ konvergent, så det finns $r \in \mathbb{R}$

så att $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N K b_n = r$. Eftersom

○ $0 \leq a_n \leq K b_n$ för alla $n=1, 2, 3, \dots$, så

○ $\sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^{N+1} a_n \leq r$ för alla $N=1, 2, 3, \dots$

vilket betyder att följderna $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$ är icke-avtagande och uppåt begränsad av r , och därmed måste den vara konvergent. (Detta bevisar (a).)

○ Om vi antar att $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent, så

med för $0 \leq a_n$, $n=1, 2, 3, \dots$, att

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \infty$ (annars vore $\sum_{n=1}^N a_n$, $N=1, 2, \dots$ uppåt begränsad och därmed konvergent.)

vilket pga antagandet $a_n \leq K b_n$ medför att

$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N K b_n = \infty$, så $\sum_{n=1}^{\infty} K b_n$ är divergent.

Enligt Sats 3 så är även $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent (Detta bevisar (b).)

(3)

Obs! För enkelhets skull börjar vi ofta numrera termen i talföljder från $n=1$ som i $a_1, a_2, a_3, \dots$, men föregående sats, samt de konvergens-tester som följer, gäller även om vi börjar numrera följderna från något annat tal än 'ett'.

Övn./Ex. Använd Sats 6 för att avgöra för var och en av serierna, om den är konvergent eller divergent.

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$$

$$(b) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-2}}.$$

Lösn. (a) $\frac{1}{n 2^n} \leq \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{för alla } n=1, 2, 3, \dots \\ \text{och eftersom} \end{array} \right.$

$\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ en konvergent

(geometrisk) serie. Enligt Sats 6 så är även $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n}$ konvergent.

(4)

(b) Vi har $\sqrt{n} > \sqrt{n-2}$ för alla

$n = 3, 4, 5, \dots$ så $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ för

alla $n = 3, 4, 5, \dots$. Enligt integraltestet (Sats 5) så är $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent,

vilket, enligt Sats 6, medför att även

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-2}}$ är divergent.

Örning/Ex. Vad är det för fel på

”Följande argument?”

”Låt $a_n = \frac{1-2^n}{2^n}$ och $b_n = \frac{1}{2^n}$ för $n=1, 2, 3, \dots$

”Då gäller att $a_n \leq b_n$ för $n=1, 2, 3, \dots$

och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent. Enligt Sats 6

”så är även $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n}$ konvergent.”

Svar: Sats 6 är inte tillämplig eftersom

$$a_n = \frac{1-2^n}{2^n} < 0 \text{ för alla } n=1, 2, 3, \dots$$

För övrigt så gäller $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-2^n}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} - 1 \right) = -1$,
 så enligt Sats 2 från föregående anteckningar så är

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{2^n} \text{ divergent.}$$

5

Ett kvotjämförelsetest

Sats 7. Antag att $a_n > 0$ och $b_n > 0$

(1) för $n=1, 2, 3, \dots$, och att $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$

(2) där L är ett reellt tal eller ∞ .

(a) Om L är ett reellt tal och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent så är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(b) Om $L > 0$ (vilket inkluderar fallet $L = \infty$) och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent så är också $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Bevis. Antag att $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ och $a_n > 0, b_n > 0$.

(a) Om $L \in \mathbb{R}$ så gäller för alla tillräckligt stora n att $0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq L+1$ (eftersom $\frac{a_n}{b_n}$ är mycket nära L) vilket ger $0 \leq a_n \leq (L+1)b_n$.
Om dessutom $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent så följer från Sats 6 att även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent.

(b) Låt $0 < K < L$. För alla tillräckligt stora n gäller då att $\frac{a_n}{b_n} \geq K$, vilket ger $0 \leq b_n \leq \frac{1}{K} a_n$. Om $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är divergent så följer från Sats 6 att även $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är divergent. ⑥

Obs! Sats 6 medför att om $a_n > 0, b_n > 0$ (för $n=1, 2, 3, \dots$) och $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ existerar som positivt reellt tal så är både $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergenta eller både $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ och $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergenta.

Övn./Ex. Avgör om följande serier är konvergenta.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+7\sqrt{n}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{n^3+n^2+n+7}$

7
Lösning. (a) Eftersom $n + 7\sqrt{n} \leq n + 7n$

= $8n$ så $\frac{1}{8n} \leq \frac{1}{n+7\sqrt{n}}$ för alla $n=1,2,\dots$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent (följsats

till Sats 5) så är även $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{8n}$ divergent

(Sats 3) och då måste $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+7\sqrt{n}}$ vara

divergent (Sats 6).

Alternativt kan kvotjämförelsetestet användas. Låt $a_n = \frac{1}{n+7\sqrt{n}}$ och $b_n = \frac{1}{n}$.

Detta ger $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{n+7\sqrt{n}} = \frac{1}{1+\frac{7}{\sqrt{n}}} \rightarrow 1$

då $n \rightarrow \infty$. Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ är divergent

så är även $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+7\sqrt{n}}$ divergent.

(b) För stora x så beror den rationella

funktionen $\frac{x+10}{x^3+x^2+x+7}$ främst på

termerna med högst grad i täljare och nämnare. Eftersom dessa termer är

$$x \text{ och } x^3, \text{ och vi har } \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

så är det rimligt att som "kvotjämförelsetestserie" ta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ där $b_n = \frac{1}{n^2}$.

$$\text{Om } a_n = \frac{n+10}{n^3+n^2+n+7} \text{ så får vi}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{n^2(n+10)}{n^3+n^2+n+7} = \frac{n^3(1+\frac{10}{n^3})}{n^3(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3})} \\ &= \frac{1+\frac{10}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}} \rightarrow 1 \text{ då } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ är konvergent så är

även $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+10}{n^3+n^2+n+7}$ konvergent.

Nu följer två konvergenstester vars bevis är lite längre, men finns i kursboken (Kap. 9.3).

Kvottestet

⑨

Sats 8. Antag att $a_n > 0$ för alla tillräckligt stora n och att $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ där L är ett reellt tal eller ∞ .

- (a) Om $0 \leq L < 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.
- (b) Om $1 < L$ (vilket inkluderar fallet då $L = \infty$) så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Obs! (a) Om $L = 1$ så ger testet ingen information om konvergens/divergens. (Vilket som kan invänta.)

- (b) Lägg märke till att kvottestet (Sats 8) betraktar $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ där a_n och a_{n+1} är två på varandra följande tal ur samma följd, medan kvotjämförelsetestet (Sats 7.) betraktar $\frac{a_n}{b_n}$ där täljare och nämnare kommer från två olika följder.

Övn./Ex. Bestäm om följande serier är konvergenta eller divergenta.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{1}{n!}$

Lös. (a) Låt $a_n = \frac{100^n}{n!}$, vilket ger

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{100^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{100^n}{n!}} = \frac{100^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{100^n} = \frac{100}{n+1} \rightarrow 0$$

då $n \rightarrow \infty$.

Kvottestet (Sats 8) medför att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$ är konvergent.

(b) Om $a_n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$ så

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{(n+1)!}}{\left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}}$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{2^n}{n^n} \cdot n! =$$

$$= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow \frac{e}{2}$$

då $n \rightarrow \infty$.

Eftersom $e > 2$ så $\frac{e}{2} > 1$ och kvottestet medför att $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$ är divergent.

Anmärkning Vi vet (pga. integraltestet)

(11)

att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ är konvergent om $r > 1$

och divergent om $r \leq 1$. För alla r

har vi dock, om $a_n = \frac{1}{n^r}$, att $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$$\frac{n^r}{(n+1)^r} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^r \rightarrow 1^r = 1 \text{ då } n \rightarrow \infty.$$

Detta visar att om $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ så

ger kvottestet inget svar på frågan om konvergens.

Rottestet

Sats 9. Antag att $a_n > 0$ för alla tillräckligt stora n och att $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^{\frac{1}{n}} = L$ där L är ett reellt tal eller ∞ .

(a) Om $0 \leq L < 1$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

(b) Om $1 < L$ så är $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Om $L = 1$ så ger rottestet ingen information om konvergens/divergens.

Örn./Ex. Använd rottestet för att avgöra om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n \sin n)^{2n}}{2^{n^2}}$ är konvergent.

Lös. Om $a_n = \frac{(n \sin n)^{2n}}{2^{n^2}}$ så $(a_n)^{\frac{1}{n}} =$

$$\frac{(n \sin n)^2}{2^n} = \frac{n^2}{2^n} \cdot \sin^2 n \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

(eftersom $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ och $0 < \sin^2 n \leq 1$).

Rottestet medför att $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n \sin n)^{2n}}{2^{n^2}}$ är konvergent.

Notera att $\sin n \neq 0$ så $a_n > 0$ för alla heltal $n \geq 1$, så rottestet är tillämbart. ($\sin x = 0$ bara om $x = \pi k$ för något heltal k och eftersom π är irrationell så är även πk irrationell om $k \neq 0$ och kan då inte vara ett heltal.)