Svar och lösningsskisser

1. '$\lim_{x \to a} f(x) = L$' betyder att

för varje reellt tal $\varepsilon > 0$ så finns ett reellt tal $\delta > 0$ så att $|f(x) - L| < \varepsilon$ för alla reella x som uppfyller att $0 \neq |x-a| < \delta$.

(Här antogs att L var ett reellt tal.
Om $L = \pm\infty$ och/eller $a = \pm\infty$ så definieras
så definieras gränsvärden på liknande sätt.
Se kursboken.)

2. Eftersom nämnaren har grad 2 så bör det räcka att ta räkna fram termer upp till grad 2 i Maclaurinutvecklingarna av e^{-2x} och $\cos x$, vilket ger

$$\frac{e^{-2x} - 2 + 2x + \cos x}{x^2} =$$

$$= \frac{(1 - 2x + 2x^2 + O(x^3)) - 2 + 2x + (1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3))}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{3x^2}{2} + O(x^3)}{x^2} = \frac{\frac{3}{2} + O(x^3)}{1} \to \frac{3}{2} \text{ då } x \to 0,$$

så gränsvärdet i uppgiften är $\frac{3}{2}$.

3. $$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

4. Eftersom $g'(x) = \dfrac{e^x x^2 - e^x 2x}{x^4} = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}$

och $e^x(x-2) = 0 \iff x = 2$, och $g'(x) > 0$

om $x < 0$ eller $x > 2$, och $g'(x) < 0$ om $0 < x < 2$,

så följer att g har en enda lokal extrempunkt som inträffar då $x = 2$, och denna lokala extrempunkt är ett lokalt minimum.

Om vi begränsar oss till intervallet $(0, \infty)$ så följer från våra uträkningar att $x = 2$ är en global minimipunkt på $(0,\infty)$ och att

$$g(2) = \frac{e^2}{4}.$$

5. Serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ är konvergent. Detta kan inses på flera sätt.

Ett alternativ: Låt $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1} = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sqrt{n}}}$ och

$b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, så $0 \leq a_n \leq b_n$. Använd sedan jämförelsetestet och faktumet att $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent (som kan visas med integraltestet).

Annat alternativ: Låt $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, så $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ är konvergent, och använd sedan kvotjämförelsetestet. (dvs undersök $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$.)

6. (a) Motexempel: Låt $a_k = \frac{1}{k}$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$

(b) Motexempel: $a_k = 1$ för $k = 1, 2, 3, \ldots$

(Då är konvergensradien 1 och $\lim_{k\to\infty} a_k = 1 \neq 0$.)

7. $f(x)$ är deriverbar i a om gränsvärdet

$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existerar som reellt tal.

8. Alla primitiva funktioner (dvs. antiderivator) till $f(x) = \frac{1}{x(x+2)}$ fås genom att beräkna den obestämda integralen $\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x(x+2)}\,dx$

$\boxed{\text{partialbråksuppdelning}}$ $= \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x+2)}\right) dx$

$= \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+2| + C$

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$. Varje primitiv funktion till f kan sålunda beskrivas av det senaste uttrycket genom att välja konstanten C på lämpligt sätt, och omvänt så är varje funktion på den formen en primitiv funktion till f.

9. Med partiell integration får man

$$\int x\cos 2x\,dx = \frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + C$$

så vi har räknat ut alla antiderivator (primitiva funktioner) till $x\cos 2x$. Detta ger

$$\int_0^{\pi} x\cos 2x = \left[\frac{x\sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4}\right]_0^{\pi} =$$

$$0 + \frac{1}{4} - \left(0 + \frac{1}{4}\right) = 0.$$

10. Längden av kurvan är, om $f(x) = x\sqrt{x}$

$$\int_0^{4/3} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx = \int_0^{4/3} \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx$$

$$= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4/3} = \frac{8}{27}(4^{4/3}.$$

11. $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1+x^2} \iff \int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\iff \ln|y| = \arctan x + C$$

$$\iff |y| = e^{\ln|y|} = e^C \cdot e^{\arctan x}$$

$$\iff y(x) = D e^{\arctan x} \quad \text{där } D \in \mathbb{R}.$$

Kravet att $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$ medför att

$\lim_{x\to\infty} De^{\arctan x} = 1$. Eftersom $\lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

så $De^{\arctan x} \to De^{\frac{\pi}{2}}$ då $x \to \infty$.

Om $De^{\frac{\pi}{2}} = 1$ så måste $D = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Den sökta lösningen är alltså $y(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{e^{\frac{\pi}{2}}}$.

12. Eftersom jag bara har behandlat linjära 2a ordningens ekvationer som är homogena (dvs. högerleder är 0) så löser jag endast

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Den karakteristiska ekvationen är

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

som har den enda lösningen $m = -1$ (en "dubbelrot"), så alla lösningar beskrivs av uttrycket

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

där konstanterna c_1, c_2 kan väljas hur man vill.

13. Jag beräknar först integralen då den övre gränsen är ett tal $b > 0$.

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \boxed{\begin{array}{l|l} t=\sqrt{x} & t^2 = x \\ \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} & \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx & \end{array}} = \int_{\sqrt{0}}^{\sqrt{b}} \frac{2}{t^2+1}\,dt$$

$$= \Big[2\arctan t\Big]_0^{\sqrt{b}} = 2\arctan\sqrt{b} - 0.$$

Så
$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} 2\arctan\sqrt{b} = \pi,$$

eftersom $\lim_{b\to\infty}\sqrt{b} = \infty$ och $\lim_{x\to\infty}\arctan x = \frac{\pi}{2}$.

14. Låt $y(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2-3x+2}$.

Eftersom $x^2-3x+2=0$ har rötterna $x=1$ och $x=2$, så är $y(x)$ inte definierad i dessa punkter.
Vi har också $\lim_{x\to 2-} y(x) = -\infty$ och $\lim_{x\to 2+} y(x) = \infty$. (Visa detta!)
Vad händer i närheten av $x=1$?
Med l'Hospitals regel ser man att $\lim_{x\to 1} y(x) = -3$.
Det gäller också att $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$ och $\lim_{x\to -\infty} y(x) = -\infty$. (Visa detta!).

Derivering och förenklingar ger

$$y'(x) = \frac{x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 3x + 2)^2}.$$

Man ser att $x = 1$ är ett nollställe till polynomet i täljaren, och division med $x-1$ ger

$$x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x^3 - 5x^2 + x + 3)$$

Man ser att $x = 1$ är ett nollställe till den högra faktorn i det högra ledet, och division ger

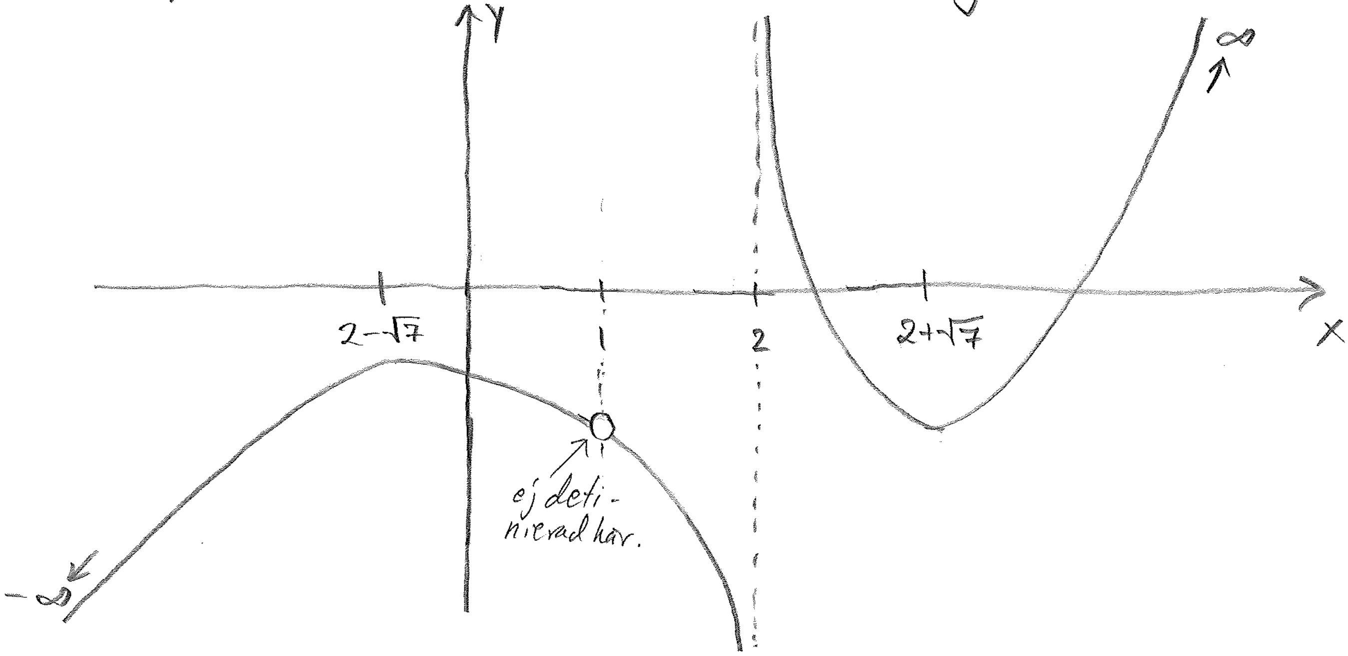
$$x^3 - 5x^2 + x + 3 = (x-1)(x^2 - 4x - 3).$$

Den högra faktorn i högerledet har rötterna

$x = 2 \pm \sqrt{7}$ (där $2 = \sqrt{4} < \sqrt{7} < \sqrt{9} = 3$) så

$$y'(x) = \frac{(x-1)^2 (x - 2 + \sqrt{7})(x - 2 - \sqrt{7})}{(x - 3x + 2)^2}.$$

Med hjälp av teckentabell för $y'(x)$ och övrig information som vi kommit fram till så följer att kurvan har följande utseende i stora drag:



15. Newtons andra lag ger kraften $F = ma = mv'(t)$. Eftersom bromskraften verkar i motsatt riktning (jämfört med farten) och är proportionell mot farten så är den $F = -kv(t)$ för någon konstant $k > 0$, vilket ger

$$mv'(t) = -kv(t)$$

som är en separabel ekvation. Separering av variable och integration ger

$$\int \frac{1}{v}\,dv = \int -\frac{k}{m}\,dt \iff$$

$$\ln|v| = -\frac{kt}{m} + C \iff$$

$$|v| = e^C \cdot e^{-\frac{kt}{m}} \iff$$

$$v(t) = D e^{-\frac{kt}{m}}, \text{ där } D \in \mathbb{R}.$$

Villkoret $v(0) = V$ ger $D = V$, och vi ser att $\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} V e^{-\frac{kt}{m}} = 0$.

(I verkligheten hinner kroppar slå i marken efter ändligt lång tid, och antagandet att luftmotståndskonstanten inte beror på farten är en förenkling. Den verkliga situationen är mera komplicerad.)

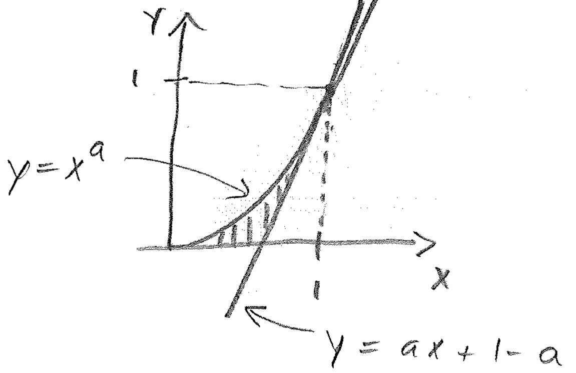
16. Låt $y = x^a$ där $a \geq 1$.

Vi får $y'(x) = ax^{a-1}$ och $y'(1) = a$, så tangentlinjen till $y = x^a$ där $x = 1$ har lutning a och eftersom den går igenom punkten $(1,1)$ så är dess ekvation $y = ax + 1 - a$. (Räkna själv.)

Om $a = 1$ så $A(a) = 0$. Antag nu att $a > 1$.

Eftersom $y''(x) > 0$ om $x > 0$ så är $y'(x)$ ökande på $(0, \infty)$, så $y = x^a$ är konkav-uppåt. Eftersom linjen $y = ax + 1 - a$ har konstant positiv lutning och skär $y = x^a$ i $(1,1)$ så måste vi ha

$$ax + 1 - a \leq x^a \text{ för alla } 0 \leq x \leq 1.$$



$A(a)$ är arean av det streckade området.

Eftersom $y = ax + 1 - a$ skär x-axeln i $x = \frac{a-1}{a}$ (räkna själv) så

$$A(a) = \int_0^1 x^a \, dx - \int_{\frac{a-1}{a}}^1 (ax + 1 - a) \, dx, \quad \text{där}$$

$$\int_0^1 x^a \, dx = \frac{1}{a+1} \quad \text{och} \quad \int_{\frac{a-1}{a}}^1 (ax + 1 - a) \, dx = 1 - \frac{a}{2} - \frac{3(a-1)^2}{2a},$$

så

$$A(a) = \frac{1}{a+1} - 1 + \frac{a}{2} + \frac{3(a-1)^2}{2a}, \quad \text{och}$$

Genom att bestämma $a > 1$ så att $A'(a) = 0$ så kan man finna det maximala värdet som $A(a)$ kan anta. Att $A(a)$ har ett största värde på $[1, \infty)$ kan inses så här. Vi har redan sett att $A(1) = 0$, och om $a > 1$ så $A(a) > 0$. Dessutom är $A(a)$ kontinuerlig på $[1, \infty)$ och $\lim_{a \to 0} A(a) = 0$ eftersom $0 \leq A(a) \leq \int_0^1 x^a \, dx = \frac{1}{a+1} \to 0$ då $a \to \infty$.

Därav följer från satsen om mellanliggande värden för kontinuerliga funktioner att $A(a)$ måste anta ett största värde (globalt max) på $[1, \infty)$.