UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Niclas Petersson

PROV I STATISTIK
Statistik IP1
2006-08-21

Lösningar till tenta 2006-08-21:

1. Restaurangbesöket.

   Definiera händelserna: $A =$*Anna glömmer plånboken*, $B =$*Bosse glömmer plånboken* samt $C =$*Cissi glömmer plånboken*. Det är givet att händelserna är oberoende samt att

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{3} \quad \text{och} \quad \mathbb{P}(C) = \frac{3}{5}.$$

   (a) Sannolikheten att åtminstone en i sällskapet har sin plånbok med sig:

   $$\mathbb{P}(A^* \cup B^* \cup C^*) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 1 - \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{24}{25}}.$$

   (b) Sannolikheten att åtminstone en i sällskapet har sin plånbok med sig givet att Anna glömt sin:

   $$\mathbb{P}(A^* \cup B^* \cup C^* \mid A) = \mathbb{P}(B^* \cup C^*) = 1 - \mathbb{P}(B \cap C) = 1 - \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{4}{5}}.$$

   (c) Sannolikheten att Anna glömt plånboken givet att åtminstone en i sällskapet har sin plånbok med sig:

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(A \mid A^* \cup B^* \cup C^*) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap (A^* \cup B^* \cup C^*))}{\mathbb{P}(A^* \cup B^* \cup C^*)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap (B^* \cup C^*))}{\mathbb{P}(A^* \cup B^* \cup C^*)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B^* \cup C^*)}{\mathbb{P}(A^* \cup B^* \cup C^*)} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{\frac{24}{25}} = \mathbf{\frac{1}{6}}. \end{aligned}$$

   (d) Väntevärdet för antalet glömda plånböcker är lika med summan av det förväntade antalet glömda plånböcker för varje enskild individ!

   Antalet plånböcker Anna glömmer är 0 med sannolikheten $\mathbb{P}(A^*)$ och 1 med sannoliketen $\mathbb{P}(A)$. Det förväntade antalet plånböcker Anna glömmer är således $0 \cdot \mathbb{P}(A^*) + 1 \cdot \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)$. Motsvarande argument gäller även för Bosse och Cissi. Således är:

   $$\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \mathbf{\frac{17}{15}}.$$

2. En produkts livslängd.

Låt X_i vara enhet i's livslängd, $i = 1, ..., 60$. Vi antar att varje enskild enhets livslängd är oberoende av övriga enheters livslängd. Enligt CGS är $\bar{X}$ approximativt $N(\mu, \frac{\sigma^2}{60})$-fördelad. Då variansen, σ^2, är okänd så skattar vi den med s^2. Teststorheten

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{60}}$$

är således en observation från en approximativt t-fördelad stokastisk variabel med 59 frihetsgrader. Det 99% (approximativa) konfidensintervallet ges av

$$\begin{aligned} I_\mu &\approx \left(\bar{x} \pm t_{59,0.01/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) \approx \left(\bar{x} \pm t_{60,0.005} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \\ &= \left(242 \pm 2.660 \cdot \frac{\sqrt{136}}{\sqrt{60}}\right) = (242 \pm 4.0) = (\mathbf{238}, \mathbf{246}) \end{aligned}$$

3. I väntan på bussen.

   (a) Sannolikheten att bussen är mer än 5 minuter försenad ges av:

   $$\mathbb{P}(X > 5) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5-3}{\sqrt{2}}\right) = 1 - \Phi(1.41) \approx 1 - 0.9207 = \mathbf{0.079}.$$

   (b) $Z = X - Y$ ty: *tiden Manfred får vänta på bussen = bussens verkliga avgångstid - Manfred ankomsttid.*

   $$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = 3 - (-1) = 4$$

   $$Var(Z) = Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) = 2 + 1.5 = 3.5$$

   Så $Z \in N(4, 3.5)$ (summor och differenser av oberoende normalfördelade stokastiska variabler också är normalfördelade).

   (c) Om väntetiden Z är negativ så har Manfred missat bussen.

   $$\mathbb{P}(Z < 0) = \Phi\left(\frac{0-4}{\sqrt{3.5}}\right) = \Phi(-2.67) = 1 - \Phi(2.67) = 1 - 0.9838 \approx \mathbf{0.016}$$

4. Mobiltelefonbatterier I.

Stickprov med $n = 7$ observationer. Skatta effektiva samtalstiden μ med medelvärdet $\bar{x}$ och variansen σ^2 med stickprovsvariansen s^2.

$$\bar{x} = 6.5, \qquad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{7}(x_i - \bar{x})^2 = 0.233$$

Det 90% konfidensintervallet blir således

$$I_\mu = \left(\bar{x} \pm t_{6,0.05} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(6.5 \pm 1.943 \cdot \frac{\sqrt{0.233}}{\sqrt{7}}\right) = (6.5 \pm 0.36) = (\mathbf{6.14}, \mathbf{6.86})$$

5. Bröllopet.

(a) $X \in Bin(70, 0.08)$.

(b) Det fattas 4 stolar om alla gäster kommer. Den sökta sannolikheten är därför $\mathbb{P}(X \geq 4)$. Man kan räkna ut denna sannolikhet exakt. Men $p = 0.08 \leq 0.10$ och $n = 70 \geq 10$ så det är något smidigare att approximera binomial-fördelningen med en poisson-fördelning. Då $n \cdot p = 70 \cdot 0.08 = 5.6$ är X approximativt $Po(5.6)$-fördelad.

$$\mathbb{P}(X \geq 4) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 3) \approx 1 - 0.1906 = \mathbf{0.81}.$$

6. Mobiltelefonbatterier II.

Beräkna: $\bar{x} = 25$ och $\bar{y} = 5.75$ samt

$$S_{xx} = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 - \frac{1}{6}\Big(\sum_{i=1}^{6} x_i\Big)^2 = 1750, \qquad S_{yy} = \sum_{i=1}^{6} y_i^2 - \frac{1}{6}\Big(\sum_{i=1}^{6} y_i\Big)^2 = 1.975$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \frac{1}{6}\Big(\sum_{i=1}^{6} x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{6} y_i\Big) = -58.5$$

(a) Korrelationskoefficienten,

$$r = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} \cdot S_{yy}}} \approx \mathbf{-0.995},$$

tyder på ett mycket starkt linjärt samband. Då $|r|$ är nära 1 är det linjära sambandet starkt.

(b) Linjär regressionsmodell: Antag att $x_1, ..., x_6$ är givna medans $y_1, ..., y_6$ är observationer av $Y_i = \alpha + \beta x_i + \epsilon_i$ där ϵ_i är $N(0, \sigma^2)$-fördelade mätfel.

Skatta β, α och σ^2 med:

$$b = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \mathbf{-0.03343}, \qquad a = \bar{y} - b\bar{x} = \mathbf{6.586}$$

$$s^2 = \frac{1}{6-2}\left(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}\right) = \mathbf{0.004857}$$

Den skattade linjens ekvation blir således $\mathbf{y = 6.586 - 0.03343x}$.

(c) 95% prediktionsintervall för den effektiva samtalstiden efter 60 uppladdningar. Använd $t_{n-2,0.05/2} = t_{4,0.025}$-fördelningen.

$$y(60) = 6.586 - 0.03343 \cdot 60 = 4.58$$

$$\begin{aligned}
I_y &= \left(y(60) \pm t_{4,0.025} \cdot s\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}} \right) = \\
&= \left(4.58 \pm 2.776 \cdot \sqrt{0.004857}\sqrt{1 + \frac{1}{6} + \frac{(60-25)^2}{1750}} \right) = \\
&= (4.58 \pm 0.27) = (\mathbf{4.31}, \mathbf{4.85})
\end{aligned}$$

(d) Minsta-kvadratmetoden.