UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Niclas Petersson

Statistik IP1
Byggteknik
2006-02-15

Lösningsskisser till Inlämningsuppgift 1

1.a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=-1}^{4} x \cdot p(x) = -1 \cdot 0.10 + 0 \cdot 0.25 + 1 \cdot 0.25 \\ &\quad +2 \cdot 0.20 + 3 \cdot 0.15 + 4 \cdot 0.05 = \mathbf{1.2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=-1}^{4} x^2 \cdot p(x) = (-1)^2 \cdot 0.10 + 0^2 \cdot 0.25 + 1^2 \cdot 0.25 \\ &\quad +2^2 \cdot 0.20 + 3^2 \cdot 0.15 + 4^2 \cdot 0.05 = 3.3\end{aligned}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3.3 - 1.2^2 = 1.86$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1.86} = 1.36 \approx \mathbf{1.4}$$

1.b) Vi utvidgar tabellen till

x [månader]	-1	0	1	2	3	4
y [miljoner kr]	4.7	4.2	4.0	3.8	3.6	3.4
$p(y)$	0.10	0.25	0.25	0.20	0.15	0.05

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y) &= \sum y \cdot p(y) = 4.7 \cdot 0.10 + 4.2 \cdot 0.25 + 4.0 \cdot 0.25 \\ &\quad +3.8 \cdot 0.20 + 3.6 \cdot 0.15 + 3.4 \cdot 0.05 = 3.99 \approx \mathbf{4.0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y^2) &= \sum y^2 \cdot p(y) = 4.7^2 \cdot 0.10 + 4.2^2 \cdot 0.25 + 4.0^2 \cdot 0.25 \\ &\quad +3.8^2 \cdot 0.20 + 3.6^2 \cdot 0.15 + 3.4^2 \cdot 0.05 = 16.029\end{aligned}$$

$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = 16.029 - 3.99^2 = 0.1089$$

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{0.1089} = \mathbf{0.33}$$

2. Vi definierar följande s.v. $X =$*Antal personer som missar planet.* Antag att de inbokade personerna missar planet oberoende av varandra. Då är $X \in Bin(224, 0.025)$. Men då $n = 224 \geq 10$ och $p = 0.025 \leq 0.10$ så är $X \tilde{\in} Po(224 \cdot 0.025) = Po(5.6)$.

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) \approx 1 - 0.0824 = \mathbf{0.92}.$$

(Där värdet 0.0824 fås ur tabell 2 med $\lambda = 5.6$ och $x = 2$).

3.a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 c(1-x^2)dx = c[x - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{2}{3}c \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \mathbf{\frac{3}{2}}$$

3.b)

$$\mathbb{P}(\frac{1}{4} < X \leq \frac{3}{4}) = \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{2}{3}(1-x^2)dx = \frac{2}{3}[x - \frac{x^3}{3}]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} = ... = \mathbf{\frac{35}{64}} \approx \mathbf{0.55}$$

3.c)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{2}(x - x^3)dx = \frac{3}{2}[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}]_0^1 = \mathbf{\frac{3}{8}} \approx \mathbf{0.38}$$

$$\mathbb{E}(X^2) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2 - x^4)dx = \tfrac{3}{2}[\tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^5}{5}]_0^1 = \tfrac{1}{5}$$

$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{1}{5} - (\frac{3}{8})^2 = \mathbf{\frac{19}{320}} \approx \mathbf{0.059}$$

4.a) Antag att vi drar korten ett och ett.

$$\mathbb{P}(\textit{par eller triss}) = 1 - \mathbb{P}(\textit{inget par eller triss})$$

Sannolikheten att inte få ett par eller triss på tre kort kan beräknas genom att multiplicera:
Sannolikheten att det andra kortet inte har samma valör som det första med *sannolikheten att det tredje kortet inte har samma valör som något av de andra (givet att kort ett och två inte är ett par)*. DVS

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\textit{par eller triss}) &= 1 - \mathbb{P}(\textit{inget par eller triss}) \\ &= 1 - \frac{48}{51}\frac{44}{50} = \frac{73}{425} = 0.17176 \approx \mathbf{0.17}. \end{aligned}$$

4.b) Låt X =*Antal ggr Lisa får par eller triss på 100 försök*. Det står klart att $X \in Bin(100, 0.0172)$. Men då $npq = np(1-p) = 14.2 \geq 10$ är $X \tilde{\in} N(np, npq) = N(17.2, 14.2)$. Approximationen ger

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 15) &= 1 - \mathbb{P}(X < 15) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 14) \approx 1 - \Phi(\frac{14 + \frac{1}{2} - 17.2}{\sqrt{14.2}}) \\ &= 1 - \Phi(-0.71) = \Phi(0.71) = \mathbf{0.76} \end{aligned}$$

Observera halvkorrektionen då vi approximerar en diskret s.v. med en kontinuerlig s.v.