UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Niklas Gunnarsson
Herman Peterson

PROV I STATISTIK
Statistik NV1
2005-01-18

Lösningsskisser.

1. (a)

   (b)

$$\begin{aligned} E[X] &= \frac{1}{10}(0*1+1*3+2*3+3*2+4*1) = \frac{19}{10} = 1.9 \\ E[X^2] &= \frac{1}{10}(0^2*1+1^2*3+2^2*3+3^2*2+4^2*1) = \frac{49}{10} = 4.9 \\ Var[X] &= E[X^2]-(E[X])^2 = 4.9-(1.9)^2 = 4.9-3.61 = 1.29 \end{aligned}$$

   (c)

$$P(\{X=2\}\cup\{X=3\}) = P(X=2)+P(X=3) = \frac{3}{10}+\frac{2}{10} = \frac{5}{10} = 0.5$$

2. (a)
   - Vi utför 13 oberoende försök.
   - I varje försök är det samma sannolikhet $p = 0.4$ att en A signal sänds ut.
   - $X =$"antalet A signaler som hjärnan registrerar vid de tretton första stimuleringarna"

   Under dessa förutsättningar är $X \in Bin(13, 0.4)$.

   (b) Diskret, ty X antar ändligt många värden.

   (c) Beräkna,

$$P(X \geq 7) = [\text{komplementsatsen}] = 1 - P(X < 7)$$
$$= 1 - P(X \leq 6) = [\text{tabell 1}] = 1 - 0.7712 = 0.2288$$

   (d) Om hjärnan ska motaga fler B impulser än A impulser så får hjärnan maximalt mottaga 6 A impulser. Vi skall alltså beräkna,

$$P(X \leq 6) = [\text{tabell 1}] = 0.7712$$

   (e) Händelserna C och D är oberoende så,

$$P(C|D) = P(C) = 0.4$$

3. (a)

$$\begin{aligned} P(X > 70) &= 1 - P(\frac{X-65}{3} < \frac{70-65}{3}) = 1 - \Phi(\frac{5}{3}) \\ &= 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.9525 \approx 0.048 \end{aligned}$$

   (b) Låt X_i='vikten av det i:te äpplet' $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} E[X_1+X_2+X_3] &= E[X_1]+E[X_2]+E[X_3] = 65+65+65 = 195, \\ Var[X_1+X_2+X_3] &= [\text{oberoende}] = Var[X_1]+Var[X_2]+Var[X_3] = 9+9+9 = 27 \end{aligned}$$

(c) $Y = X_1 + X_2 + X_3 \in N(195, 27)$.

$$\begin{aligned}
P(180 < Y < 200) &= P(\frac{180-195}{\sqrt{27}} < \frac{Y-195}{\sqrt{27}} < \frac{200-195}{\sqrt{27}}) \\
&= P(\frac{Y-195}{\sqrt{27}} < \frac{200-195}{\sqrt{27}}) - P(\frac{Y-195}{\sqrt{27}} < \frac{180-195}{\sqrt{27}}) \\
&= \Phi(\frac{200-195}{\sqrt{27}}) - \Phi(\frac{180-195}{\sqrt{27}}) = \Phi(0.96) - \Phi(-2.89) \\
&= \Phi(0.96) - 1 + \Phi(2.89) \approx 0.8315 - 1 + 0.9981 = 0.8296
\end{aligned}$$

4. Vi skall testa hypotesen

$$\begin{aligned}
H_0 &: \quad \text{vinstsannolikheterna är } \frac{1}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{7} \text{ respektive,} \\
H_1 &: \quad \text{någon av sannolikheterna stämmer inte.}
\end{aligned}$$

Vi kommer att utföra ett χ^2-test.
Låt y_1, y_2, y_3 vara de observerade värdena och p_1, p_2, p_3 vara sannolikheternasom Allan och Sven har beräknat. Under H_0 så är

$$\chi^2_{obs} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(y_i - np_i)^2}{np_i}$$

en observation från en approximativt χ^2_2-fördelad s.v. Vi förkastar H_0 om $\chi^2_{obs} > \chi^2_{2,0.05} = 5.991$.

$$\begin{aligned}
\chi^2_{obs} &= \frac{(33 - 200 * \frac{1}{7})^2}{200 * \frac{1}{7}} + \frac{(102 - 200 * \frac{4}{7})^2}{200 * \frac{4}{7}} + \frac{(65 - 200 * \frac{2}{7})^2}{200 * \frac{2}{7}} \\
&\approx 0.686 + 1.321 + 1.080 = 3.0875 < 5.991.
\end{aligned}$$

H_0 Kan ej förkastas.

5. För att skatta α, β och σ^2 behövs nedanstående storheter.

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= 2.25 \qquad \bar{y} = 3.3125 \\
S_{xx} &= 51 - \frac{1}{8}(18)^2 = 10.5 \\
S_{yy} &= 96.59 - \frac{1}{8}(26.5)^2 = 8.80875 \\
S_{xy} &= 69.15 - \frac{1}{8}18 * 26.5 = 9.525.
\end{aligned}$$

Enligt FT-samlingen skattas α, β och σ^2 med

$$\begin{aligned}
b &= \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{9.525}{10.5} \approx 0.90714 \\
a &= \bar{y} - b\bar{x} = 3.3125 - 0.90714 * 2.25 \approx 1.27143 \\
\sigma^2 &= \frac{1}{8-2}(S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}}) = \frac{1}{6}(8.80875 - \frac{(9.525)^2}{10.5}) \approx 0.028036.
\end{aligned}$$

95% prediktionsintervall för $x = 3.3$ ges av

$$\begin{aligned}
I_y &= \left(a + bx - t_{6,0.025} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}}, a + bx + t_{6,0.025} \cdot s \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{S_{xx}}}\right) \\
&= \left(4.264992 - 2.447 \cdot 0.1674395 \cdot \sqrt{1.23}, 4.264992 + 2.447 \cdot 0.1674395 \cdot \sqrt{1.23}\right) \\
&\approx (3.81 , 4.72).
\end{aligned}$$

6. (a) Beräkna först s_x^2 och s_y^2 och väg sedan samman dessa enligt

$$s^2 = \frac{(12-1)s_x^2 + (18-1)s_y^2}{(12-1)+(18-1)}.$$

$$\begin{aligned}
s_x^2 &= \frac{1}{12-1}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - \frac{1}{12}(\sum_{i=1}^{12} x_i)^2\right) \\
&= \frac{1}{11}\left(203.6432 - \frac{1}{12}(49.06)^2\right) \approx 0.27905 \\
s_x^2 &= \frac{1}{18-1}\left(\sum_{i=1}^{18} y_i^2 - \frac{1}{18}(\sum_{i=1}^{18} y_i)^2\right) \\
&= \frac{1}{11}\left(266.0687 - \frac{1}{12}(68.23)^2\right) \approx 0.43759 \\
&\Rightarrow \\
s^2 &= \frac{11 * 0.27905 + 17 * 0.43759}{11+17} \approx 0.375306 \approx 0.375.
\end{aligned}$$

(b) Vi skall testa hypotesen,
$H_0 : \mu_x = \mu_y$ mot
$H_1 : \mu_x \neq \mu_y$
Bilda testvariabeln $t = \frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{s}\sqrt{1/12+1/18}}$ som under nollhypotesen är en observation från s.v. $T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{s\sqrt{1/12+1/18}} \in t_{12+18-2} = t_{28}$. Vi förkastar nollhypotesen om $|t| > t_{28,0.025}$.

$$|t| = \left| \frac{4,088 - 3,791}{\sqrt{0.375306}\sqrt{1/12+1/18}} \right| \approx 1.3 < 2.048 = t_{28,0.025},$$

ej signifikant.

7. Låt X_i vara livslängden för den i:te komponenten, $i = 1, 2, 3, \dots, 150$. Vi antar att livslängden för varje enskild komponent är fördelad enligt en fördelning F med väntevärde μ och standardavvikelse σ. Enligt centrala gränsvärdes satsen är då $\bar{X} \tilde{\in} N(\mu, \sigma^2/150)$. Eftersom σ^2 är okänd så skattar vi den med s^2 och får att teststorheten

$$t = \frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{150}} \tag{1}$$

är en observation från en approximativt t-fördelad s.v. med 149 frihetsgrader. Från detta får vi att ett approximativt 99% konfidensintervall för väntevärdet är

$$\begin{aligned}
I_\mu &\approx (\bar{x} - t_{149,0.01/2}\frac{s}{\sqrt{150}}, \bar{x} + t_{149,0.01/2}\frac{s}{\sqrt{150}}) \\
&\approx [t_{149,0.005} \text{ står inte i tabellen så vi väljer } t_{\infty,0.005} \text{ eller } t_{100,0.005}] \\
&\approx (10.35 - t_{100,0.005}\frac{\sqrt{0.42}}{\sqrt{150}}, 10.35 + t_{100,0.005}\frac{\sqrt{0.42}}{\sqrt{150}}) \\
&\approx [t_{100,0.005} = 2.626] \\
&\approx (10.35 - 2.626\frac{\sqrt{0.42}}{\sqrt{150}}, 10.35 + 2.626\frac{\sqrt{0.42}}{\sqrt{150}}) \\
&\approx (10.21, 10.49).
\end{aligned}$$

Vi skulle alternativt ha kunnat använda normalfördelningens kvantil i beräkningarna ovan eftersom denna för stora n ger en rimlig approximation.