

Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3

1. Sannolikhetsteori

1.1 Allmänt

Fördelningsfunktion: $F(x) = P(X \leq x)$.

Kvantil: Det tal x_α som uppfyller $F(x_\alpha) = 1 - \alpha$.

Diskret s.v.: X är diskret om den antar ett ändligt eller ett uppräknligt antal värden $x_1, x_2, \dots$ med sannolikheter $p(x_1), p(x_2), \dots$ där $p(x)$ är *sannolikhetsfunktion* till X .

Kontinuerlig s.v.: X är kontinuerlig med *täthetsfunktion* $f(x)$ om X antar alla värden i ett intervall och $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ för alla x .

Då gäller:

1) $f(x) = F'(x) \geq 0$ för alla x där derivatan existerar,

2) $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$ 3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

Väntevärde:

$$E(X) = \mu = \begin{cases} \sum_i x_i p(x_i) & (X \text{ diskret}), \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx & (X \text{ kontinuerlig}). \end{cases}$$

Varians: $V(X) = \sigma^2 = E((X - \mu)^2) = E(X^2) - \mu^2$.

Standardavvikelse: $D(X) = \sigma = \sqrt{V(X)}$.

Kovarians: $C(X, Y) = E((X - \mu_x)(Y - \mu_y)) = E(XY) - \mu_x \cdot \mu_y$.

Korrelationskoefficient: $\rho(X, Y) = \frac{C(X, Y)}{D(X) \cdot D(Y)}$.

1.2 Diskreta fördelningar

Binomialfördelning: $X \in \text{Bin}(n, p)$ om $p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

$$0 \leq p \leq 1, \quad q = 1 - p, \quad \mu = np, \quad \sigma^2 = npq.$$

Geometrisk fördelning: $X \in \text{Ge}(p)$ om $p(k) = pq^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$0 < p \leq 1, \quad q = 1 - p, \quad \mu = \frac{q}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{q}{p^2}.$$

För första gången-fördelning: $X \in \text{ffg}(p)$ om $p(k) = pq^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, \dots$.

$$0 < p \leq 1, \quad q = 1 - p, \quad \mu = \frac{1}{p}, \quad \sigma^2 = \frac{q}{p^2}.$$

Poissonfördelning: $X \in \text{Po}(\mu)$ om $p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$\mu > 0, \quad \sigma^2 = \mu.$$

Hypergeometrisk fördelning: $X \in \text{Hyp}(N, n, p)$ om $p(k) = \frac{\binom{Np}{k} \binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}$,
 $k = 0, 1, \dots, n$ (för de k som är möjliga: k får t.ex. inte överstiga Np).
 $0 \leq p \leq 1, \quad q = 1 - p, \quad \mu = np, \quad \sigma^2 = npq \cdot \frac{N-n}{N-1}.$

1.3 Kontinuerliga fördelningar

Rektangelfördelning (Likformig förd.): $X \in \text{Re}(a, b)$ om $f(x) = \frac{1}{b-a}, \quad a \leq x \leq b.$

$$\mu = \frac{a+b}{2}, \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exponentialfördelning: $X \in \text{Exp}(\lambda)$ om $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad \lambda > 0, \quad \mu = \frac{1}{\lambda}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$

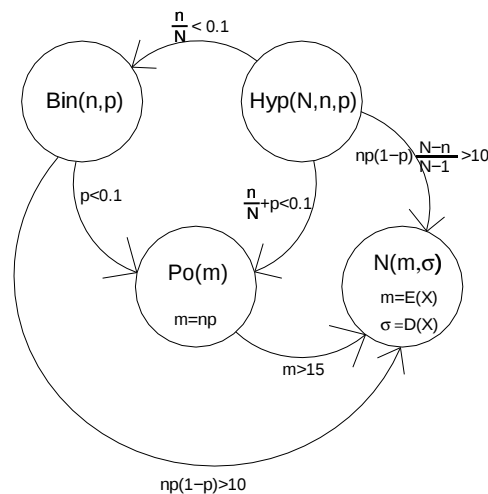
Γ -fördelning: $X \in \Gamma(n, \lambda)$ om $f(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \quad \lambda > 0, \quad \mu = \frac{n}{\lambda}, \quad \sigma^2 = \frac{n}{\lambda^2}.$

Summan av n st oberoende $\text{Exp}(\lambda)$ -fördelade stokastiska variabler är en $\Gamma(n, \lambda)$ -fördelad stokastisk variabel.

Normalfördelning: $X \in \text{N}(\mu, \sigma)$ om $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma > 0.$

För $\text{N}(0, 1)$ -fördelningen gäller att fördelningsfunktionen betecknas med $\Phi(x)$ och kvantilerna med λ_α .

1.4 Approximationer:



$p \cdot \text{Ge}(p) \approx \text{Exp}(1)$, för små p . (Gäller även för $p \cdot \text{ffg}(p)$.)

1.5 Diverse:

Geometrisk summa: $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}, \quad \text{för } |a| < 1. \quad \sum_{k=n}^{\infty} a^k = \frac{a^n}{1-a}, \quad \text{för } |a| < 1.$

Exponentialfunktionen: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^a. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$

2. Stokastiska processer

2.1 Allmänt

$\{X(t), t \in I\}, t \mapsto X(t) \in E$.

Tillståndsrums, E :

Diskret, om tex $E = \{0, 1, \dots, r\}$ eller $E = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Kontinuerligt, om tex $E = [0, 1]$, $E = [0, \infty)$.

Tidsindexering, I :

Diskret tid, vanligtvis $I = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Kontinuerlig tid, vanligtvis $I = [0, \infty)$.

Moment:

Väntevärdessfunktion $m(t) = E(X(t))$,

Variationsfunktion $v(t) = V(X(t))$,

Kovariationsfunktion $r(s, t) = C(X(s), X(t))$,

Korrelationsfunktion $\rho(s, t) = r(s, t) / \sqrt{v(s)v(t)}$.

Svagt stationär: Om $m(t)$ är oberoende av t och $r(s, t)$ enbart beror av $t - s$.

2.2 Livslängdsanalys

Livslängdsfördelning $F(t) = P(T \leq t)$ med överlevnadsfunktion $R(t) = 1 - F(t)$, felintensitet $\lambda(t) = f(t)/R(t) = F'(t)/R(t) = -\frac{d}{dt} \ln(1 - F(t))$ och kumulativ felintensitet $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, t \geq 0$.

Samband: $F(t) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) ds \right\}$.

Återstående livslängd vid tiden s : $P(T_s \leq t) = 1 - \exp \left\{ - \int_s^{s+t} \lambda(u) du \right\}$.

Jämviktsfördelning: $F_e(t) = P(T_e \leq t) = \frac{1}{m} \int_0^t R(s) ds, m = E(T) = \int_0^\infty R(t) dt$.

IFR (DFR): växande (avtagande) felintensitet.

NBU (NWU): $R(s+t) \leq (\geq) R(s)R(t), s, t \geq 0$.

NBUE (NWUE): $F(t) \leq (\geq) F_e(t), t \geq 0$.

2.3 Tillförlitlighet

Ett system av komponenter har funktionssannolikhet

$R = P(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r)$, där $V_1, V_2, \dots, V_r$ är de olika vägarna genom systemet. En väg är en mängd komponenter sådana att om alla dessa fungerar så fungerar systemet.

$1 - R = P(S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_s)$, där $S_1, S_2, \dots, S_s$ är de olika snitten i systemet. Ett snitt är en mängd komponenter sådan att om alla dessa är ur funktion så fungerar inte systemet.

2.4 Poissonprocessen

$\{N(t), t \geq 0\}$, intensitet λ .

Tre ekvivalenta definitioner:

1. Exponentialfördelade mellanhandelsetider,
2. Oberoende och stationära inkrement, $N(t) \in Po(\lambda t)$,
3. Oberoende inkrement, infinitesimal hoppintensitet λ .

2.5 Markovkedjor i diskret tid

Markovegenskapen: För godtyckliga $n \geq 1, x_0, \dots, x_n$,

$$P(X_n = x_n | X_0 = x_0, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

Övergångssannolikheter: $p_{ij}^{(m)} = P(X_{n+m} = j | X_n = i)$, oberoende av n i det *tidshomogena* fallet.

Övergångsmatris: $\mathbf{P}^{(m)} = (p_{ij}^{(m)})$, speciellt $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{(1)}$.

Chapman-Kolmogorovs sats: $\mathbf{P}^{(m)} = \mathbf{P}^m$, $\mathbf{P}^{(m+n)} = \mathbf{P}^{(m)} \cdot \mathbf{P}^{(n)}$, $p^{(m)} = p^{(0)} \mathbf{P}^m$.

Stationär fördelning π : ges av $\pi = \pi \mathbf{P}$ med $\sum \pi_i = 1$.

Asymptotiska fördelningar:

Irreducibla, aperiodiska Markovkedjor: Om tillståndsrummet är ändligt, finns det en entydig stationär gränsfördelning. Om tillståndsrummet är uppräknligt och det finns en stationär fördelning, så är den entydig och också asymptotisk fördelning.

2.6 Markovkedjor med kontinuerlig tid

Markovegenskapen: För godtyckliga $n \geq 1, x_0, \dots, x_n, t_0 \leq \dots \leq t_n$,

$$P(X(t_n) = x_n | X(t_0) = x_0, \dots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) = P(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}).$$

Övergångssannolikheter: $p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j | X(s) = i)$, är oberoende av s i det *tidshomogena* fallet.

Övergångsmatris: $\mathbf{P}(t) = (p_{ij}(t))$.

Chapman-Kolmogorovs relation: $\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t)$.

Intensitetsmatris: $\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \mathbf{P}'(0)$. q_{ij} , $i \neq j$, är hoppintensiteter för hopp från i till j , $q_{ii} = -q_{ii}$, är hoppintensiteten för att lämna tillstånd i .

Stationär fördelning π : ges av $0 = \pi \mathbf{Q}$ med $\sum \pi_i = 1$.

Asymptotisk fördelning: Irreducibel Markovkedja: Om tillståndsrummet är ändligt finns det en entydig stationär gränsfördelning.

Födelse-och-döds-process: $\lambda_n = q_{n,n+1}$, $\mu_n = q_{n,n-1}$.

Balansekvationer: $\mu_n \pi_n = \lambda_{n-1} \pi_{n-1}$, $n \geq 1$.

Stationär fördelning: $\pi_n = \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \dots \mu_n} \pi_0$, och $\pi_0 = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \dots \mu_k}\right)^{-1}$,

om $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \dots \mu_k} < \infty$ och asymptotisk fördelning om även $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_1 \dots \mu_k}{\lambda_1 \dots \lambda_k} = \infty$.