

Tillåtna hjälpmedel: Tabeller över statistiska fördelningar, Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, Beta Mathematics handbook och valfri räknedosa.

Uppgifterna 1 och 4 ger högst 5 poäng vardera, övriga uppgifter ger högst 6 poäng vardera.

1. För en viss grupp individer är dödsintensiteten (tidsenhet: år)

$$\lambda(t) = 3 \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-5} \cdot e^{t/10}.$$

Beräkna sannolikheten att en 25-åring blir 50 år gammal.

2. Vid ett kraftverk inträffar driftsstörningar enligt en Poissonprocess med intensiteten 6 störningar per år. Beräkna sannolikheten att

- (a) det första kvartalet är utan störningar,
- (b) det under det första halvåret inträffar exakt en störning,
- (c) det första kvartalet är utan störningar givet att det under det första halvåret inträffar exakt en störning.

3. Adam och Bertil äter varje dag lunch vid samma tid på någon av stadens två lunchrestauranger, Krubbet och Stekoset.

Om Adam ätit en lunch på Krubbet byter han nästa dag till Stekoset med sannolikhet 0.6 medan han efter en lunch på Stekoset byter till Krubbet med sannolikhet 0.8.

Bertil's val av lunchställe bestäms helt av hans ovilja mot Adam, så att han alltid byter matställe nästa dag om han råkat hamna på samma ställe som Adam, annars äter han på samma ställe även nästa dag.

- (a) Hur ofta, i det långa loppet, kommer Adam och Bertil att äta på samma ställe?
- (b) Kan Du föreslå någon annan strategi för Bertil som gör att han mera sällan behöver stöta på Adam?

Ledning: Det kan vara lämpligt att införa en Markovkedja med 4 tillstånd.

4. En epidemiolog gör upp följande modell för antalet förkylda personer i hans familj (som består av 4 personer) vid tidpunkt t (tidsenhet: dygn).

Varje sjuk person tillfrisknar med intensitet 0.1 och kan då åter bli smittad.

Varje frisk person kan bli smittad, dels av någon sjuk familjemedlem, med intensitet $= 0.01 \cdot (\text{antalet sjuka})$, och dels av någon utomstående, med intensitet $= 0.05$.

Bestäm jämviktsfördelningen för antalet sjuka i familjen.

5. En stationär process $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n + 0.5Y_{n-1} = X_n,$$

där $\{X_n\}$ är normalfördelat vitt brus med varians 4.

- (a) Bestäm kovariansfunktionen för $\{Y_n\}$.
 - (b) Vilken fördelning har Y_n ?
 - (c) Hur stor andel av tiden kommer processen $\{Y_n\}$ att ligga ovanför nivån 5?
6. Till en betjäningstation, med en betjänares, anländer kunder enligt en Poissonprocess med intensitet 2 (per timme). Betjäningstiderna är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 20 minuter. Det finns obegränsat med köplatser och kunder som anländer då betjänares är upptagen väntar alltid i kön. (Detta är alltså ett s.k. M/M/1-system.) Sett ur betjänares synpunkt kan tiden delas in i *upptagetperioder* då han är sysselsatt med betjäning och *ledighetsperioder* då stationen är tom på kunder.
- (a) Hur stor andel av tiden är betjänares sysselsatt med betjäning?
 - (b) Bestäm den förväntade längden av en ledighetsperiod.
 - (c) Bestäm den förväntade längden av en upptagetperiod.
Ledning: Man kan ha nytta av att notera att de tidpunkter då kunder anländer till ett tomt system utgör förnyelser!
7. Ett system består av två seriekopplade komponenter, som oberoende av varandra går sönder med intensitet 2. Systemet fungerar alltså så länge båda komponenterna fungerar. Man är inte nöjd med systemets livslängd och överväger tre olika varianter för att förbättra systemet:
- A: Ersätt komponenterna med (dubbelt så dyra) komponenter som har felintensitet 1 vardera.
- B: Dubblera systemet, så att det består av två delsystem som är likadana som det ursprungliga och fungerar så länge något av delsystemen fungerar. (Parallellkopplade seriesystem.)
- C: Dubblera komponenterna i systemet, så att det består av två seriekopplade parallellsystem och fungerar så länge båda delsystemen fungerar.
- (a) Illustrera alternativen grafiskt.
 - (b) Beräkna funktionssannolikheterna för de tre alternativen.
 - (c) Vilken av lösningarna skulle Du rekommendera? Motivera!
Jämför t.ex. systemens förväntade livslängder!