

1. Överlevnadsfunktionen $R(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(s) ds\}$, där

$$\int_0^t \lambda(s) ds = 3t \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-5} \int_0^t e^{s/10} ds = 3t \cdot 10^{-3} + 6 \cdot 10^{-4}(e^{t/10} - 1),$$

så att $R(t) = \exp\{-3t \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-4}(e^{t/10} - 1)\}$. Detta ger

$$\begin{aligned} P(T > 50 | T > 25) &= \frac{R(50)}{R(25)} = \frac{\exp\{-150 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-4}(e^5 - 1)\}}{\exp\{-75 \cdot 10^{-3} - 6 \cdot 10^{-4}(e^{2.5} - 1)\}} \\ &= e^{-0.075} \cdot e^{-6 \cdot 10^{-4}(e^5 - e^{2.5})} \approx e^{-0.1567} \approx 0.855. \end{aligned}$$

2. Med tidsenhet = år erhålls $X(1/4) \in \text{Po}(6/4) = \text{Po}(3/2)$, $X(1/2) \in \text{Po}(3)$ och $X(1/2) - X(1/4) \in \text{Po}(3/2)$. Här är $X(1/4)$ och $X(1/2) - X(1/4)$ oberoende.

(a) $P(X(1/4) = 0) = e^{-3/2} \approx 0.223$,

(b) $P(X(1/2) = 1) = 3 \cdot e^{-3} \approx 0.149$,

(c)
$$\begin{aligned} P(X(1/4) = 0 | X(1/2) = 1) &= \frac{P(X(1/4) = 0, X(1/2) = 1)}{P(X(1/2) = 1)} = \\ &= \frac{P(X(1/4) = 0, X(1/2) - X(1/4) = 1)}{P(X(1/2) = 1)} = \\ &= \frac{P(X(1/4) = 0) \cdot P(X(1/2) - X(1/4) = 1)}{P(X(1/2) = 1)} = \frac{e^{-3/2} \cdot 1.5e^{-3/2}}{3e^{-3}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Inför tillstånden E_1 : Adam och Bertil äter på *Krubbet*, E_2 : Adam äter på *Krubbet* och Bertil på *Stekoset*, E_3 : Bertil äter på *Krubbet* och Adam på *Stekoset*, E_4 : Adam och Bertil äter på *Stekoset*. Detta ger en Markovkedja i diskret tid med övergångsmatris

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kedjan är irreducibel ($E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_4 \rightarrow E_3 \rightarrow E_1$) och aperiodisk ($p_{22} = 0.4 > 0$), så att det finns en asymptotisk fördelning π , som ges av $\pi = \pi \mathbf{P}$, med lösning $\pi_1 = 12/35$, $\pi_2 = 8/35$, $\pi_3 = 3/35$, $\pi_4 = 12/35$.

(a) $P(\text{Adam och Bertil äter på samma ställe}) = \pi_1 + \pi_4 = 24/35 \approx 0.686$,

(b) i. Om Bertil singlar slant om var han ska äta lunch är risken bara 1/2 att han hamnar på samma ställe som Adam.

ii. Om Bertil alltid äter på *Stekoset* blir risken $\pi_3 + \pi_4 = 15/35 = 3/7 \approx 0.429$.

iii. Om Bertil byter till strategin: "Stanna om samma som Adam, byt om olika" blir risken $\pi_2 + \pi_3 = 11/35 \approx 0.314$.

4. Låt $X(t)$ = "antalet sjuka i familjen vid tidpunkt t ". $\{X(t)\}$ är då en F&D-process eftersom den bara kan ändra tillstånd med ± 1 och alla intensiteter är konstanta. Den har födelseintensiteter: $\lambda_k = (4 - k) \cdot (0.01k + 0.05)$, för $0 \leq k < 4$, och dödsintensiteter $\mu_k = 0.1k$, för $1 \leq k \leq 4$, dvs. $\lambda_0 = 0.2$, $\lambda_1 = 0.18$, $\lambda_2 = 0.14$, $\lambda_3 = 0.08$ och $\mu_1 = 0.1$, $\mu_2 = 0.2$, $\mu_3 = 0.3$, $\mu_4 = 0.4$.

Detta ger $\pi_1 = 2\pi_0$, $\pi_2 = 1.8\pi_0$, $\pi_3 = 0.84\pi_0$, $\pi_4 = 0.168\pi_0$, så att

$$\pi_0 = 1/(1 + 2 + 1.8 + 0.84 + 0.168) = 1/5.805 \approx 0.172 \text{ och}$$

$$\pi \approx (0.172, 0.344, 0.310, 0.145, 0.029).$$

Var god vänd!

5. $\{Y_n\}$ är en AR(1)-process med $a_1 = 0.5$ där bruset, $\{X_n\}$, är normalfördelat med varians 4, dvs. $X_n \in N(0, 2)$.

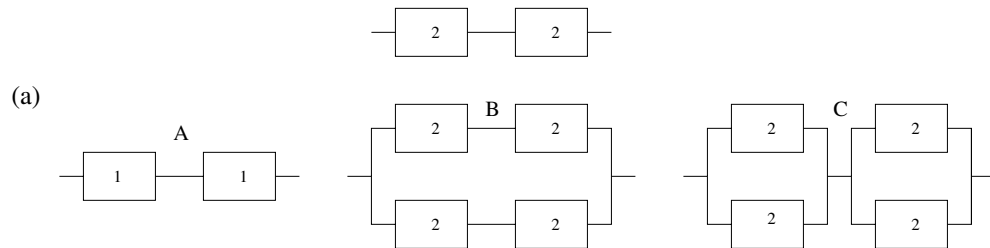
- (a) Kovariansfunktionen ges av Yule-Walker-ekvationerna: $r(0) + 0.5r(1) = 4$, $r(k) + 0.5r(k-1) = 0$, för $k \geq 1$, med lösning $r(0) = 16/3$, $r(k) = (-0.5)^k \cdot 16/3$, för $k \geq 1$ och $r(-k) = r(k)$.
- (b) Om insignalen till ett linjärt filter är normalfördelat så är även utsignalen det, så att $Y_n \in N(0, \sqrt{r(0)}) = N(0, 4/\sqrt{3})$.
- (c) $P(Y_n > 5) = 1 - P(Y_n \leq 5) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{4/\sqrt{3}}\right) \approx 1 - \Phi(2.165) \approx 0.015$.

6. Systemet är ett M/M/1-system med ankomstintensitet 2 (per timme) och betjäningintensitet 3 (per timme), dvs. betjäningfaktor $\rho = 2/3$. Jämviktsfördelningen för antalet kunder i systemet är då geometrisk, dvs. $\pi_k = \rho^k(1 - \rho)$.

- (a) Betjänarens sysselsättningsgrad är $1 - \pi_0 = \rho = 2/3$.
- (b) Eftersom ankomstprocessen är en Poisson-process är ledighetsperioderna, L_n , exponentialfördelade med väntevärde $1/2$.
- (c) Tidpunkter då kunder anländer till ett tomt system utgör förnyelser. Efter varje förnyelse kommer en upptagetperiod, U_n , följt av en ledighetsperiod, dvs. vi har en alternerande förnyelseprocess.
Belöningsatsen ger då att andelen av tiden då betjänaaren är upptagen, som enligt (a) är $\rho = 2/3$, är

$$\frac{E(U_n)}{E(U_n) + E(L_n)} = \frac{E(U_n)}{E(U_n) + 1/2}, \text{ vilket ger } E(U_n) = 1.$$

7. Det ursprungliga systemet är ekvivalent med ett system bestående av en enda komponent med felintensitet $2+2=4$, dvs. funktionssannolikhet $R(t) = e^{-4t}$.



- (b) $R_A(t) = e^{-t} \cdot e^{-t} = e^{-2t}$, $R_B(t) = 1 - (1 - e^{-4t})^2 = 2e^{-4t} - e^{-8t}$,
 $R_C(t) = (2e^{-2t} - e^{-4t})^2 = 4e^{-4t} - 4e^{-6t} + e^{-8t}$.

(c) $E(T_A) = \int_0^\infty R_A(t) dt = \int_0^\infty e^{-2t} dt = \frac{1}{2}$,

$$E(T_B) = \int_0^\infty R_B(t) dt = \int_0^\infty (2e^{-4t} - e^{-8t}) dt = \frac{2}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8} < \frac{1}{2},$$

$$E(T_C) = \int_0^\infty R_C(t) dt = \int_0^\infty (4e^{-4t} - 4e^{-6t} + e^{-8t}) dt = \frac{4}{4} - \frac{4}{6} + \frac{1}{8} = \frac{11}{24} < \frac{1}{2},$$

så att $E(T_B) < E(T_C) < E(T_A)$.

Välj system A!