

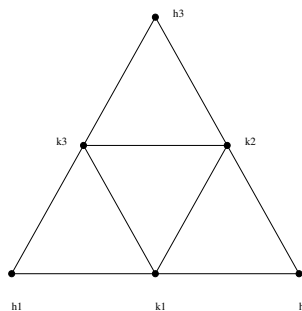
Tillåtna hjälpmedel: Tabeller över statistiska fördelningar, Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, Beta Mathematics handbook och valfri räknedosa.

Uppgifterna 1 och 4 ger högst 5 poäng vardera, övriga uppgifter ger högst 6 poäng vardera.

1. En viss apparat har felintensiteten (tidsenhet: år)

$$\lambda(t) = \frac{t}{4} + \frac{1}{t+1}.$$

- (a) Beräkna sannolikheten att en apparat fungerar minst ett år.
 - (b) Beräkna sannolikheten att en apparat, som fortfarande fungerar efter ett år, fungerar ytterligare minst ett år.
2. För att fördriva tiden fram till julklappsutdelningen roar sig lille Robin med att räkna bilar som passerar på vägen utanför huset. Han noterar att ungefär dubbelt så många kör norrut som söderut. Antag att trafiken följer två oberoende Poisson-processer med dubbelt så stor intensitet för norrgående som för södergående trafik.
- (a) Vad är sannolikheten att den första bilen han ser är norrgående?
 - (b) Vad är sannolikheten att de två första bilarna han ser är norrgående?
 - (c) Vad är sannolikheten att de 5 första bilarna kör i samma riktning?



3. En partikel startar vid tid 0 i hörnet H_1 och utför därefter en slumpvandring så att den vid varje heltalstidpunkt flyttar till någon av grannpunkterna, med lika stor sannolikhet för var och en av dessa. Beräkna sannolikheten att partikeln befinner sig i något av hörnen (H_1 , H_2 eller H_3)
- (a) efter 3 förfluttningar,
 - (b) efter lång tid.

Ledning: Inför en Markovkedja med lämpligt många tillstånd.

4. En man lägger ut ett fisknät på kvällen och vittjar det följande morgon. Under tiden nätet är utlagt fastnar fiskar i det enligt en Poissonprocess med intensitet λ (per timme). En fisk som fastnat i nätet tar sig loss med intensitet $\lambda/3$. Vad är sannolikheten att det finns minst 4 fiskar i nätet när det vittjas? (Du kan, precis som de stackars fiskarna, betrakta natten som mycket lång.)

Var god vänd!

5. En stationär process $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n = X_n + \frac{1}{2}X_{n-1} + \frac{1}{2}X_{n-2},$$

där $\{X_n\}$ är vitt brus med varians 9.

- (a) Bestäm kovariansfunktionen för $\{Y_n\}$.
 - (b) Man har observerat $Y_8 = 2.4$. Utnyttja detta för att prediktera Y_9 .
6. Till en telefonväxel med 4 linjer kommer samtal enligt en Poissonprocess med intensitet 0.5 samtal per minut. Samtalstiderna är oberoende (både sinsemellan och av ankomstprocessen) och exponentialfördelade med väntevärde 4 minuter. Bestäm, under jämvikt, sannolikheten att alla linjer är upptagna.
7. Ett system består av två enheter, A och B . Först kopplas A in aktivt och B passivt. När A går sönder kopplas B in aktivt (om den är hel). När båda gått sönder repareras de samtidigt under en tid som är exponentialfördelad med väntevärde 2 timmar. En aktiv enhet går sönder med intensitet 0.2 (per timme) och en passiv med intensitet 0.1. Systemet befinner sig alltså endera i drift eller under reparation. Låt $X(t)$ vara "antalet trasiga maskiner vid tidpunkt t ".
- (a) Motivera att $\{X(t)\}$ är en Markovprocess och ange dess övergångsintensiteter.
 - (b) Bestäm jämviktsfördelningen för $X(t)$.
 - (c) Bestäm den förväntade längden av en driftperiod.
 - (d) Beräkna systemets tillgänglighet, dvs. den andel av tiden som systemet är i drift.