

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, Tabeller över statistiska fördelningar, Beta Mathematics handbook och valfri räknedosa.

Uppgifterna 1 och 2 ger högst 5 poäng vardera, övriga uppgifter ger högst 6 poäng vardera.

1. Fyra komponenter med oberoende livslängder och alla med felintensitetsfunktion $\lambda(t) = t^2/3$ (tidsenhet: dygn) startas samtidigt. Efter två dygn kontrolleras komponenterna. Vad är då sannolikheten att
 - (a) en viss komponent fortfarande fungerar?
 - (b) ingen av komponenterna fungerar?
 - (c) alla komponenterna fungerar?
 - (d) exakt en av komponenterna fungerar?
 - (e) minst två av komponenterna fungerar?
2. Stella roar sig ibland med att sitta vid fönstret och titta på passerande fordon. Hon är speciellt road av tyngre fordon, bussar och lastbilar, och sitter kvar tills det kommit både en buss och en lastbil. Dessa passerar enligt oberoende Poissonprocesser med intensiteter 10 bussar per timme och 20 lastbilar per timme. Vad är sannolikheten att
 - (a) hon efter 10 minuter ännu inte sett någon buss?
 - (b) hon sitter kvar efter 10 minuter?
 - (c) hon är klar redan efter att två tyngre fordon passerat?
3. En Markovkedja i diskret tid med tillstånden E_1, E_2, E_3 och E_4 har övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kedjan startar i ett på måfå valt tillstånd.

- (a) Med vilken sannolikhet befinner den sig i tillståndet E_4 efter tre övergångar?
- (b) Om kedjan befinner sig i tillståndet E_2 efter två övergångar, med vilken sannolikhet befinner den sig i E_4 efter ytterligare två övergångar?
- (c) Existerar det en asymptotisk fördelning? Beräkna i så fall denna.

Var god vänd!

4. På en verkstad finns en maskin och en reparatör. Maskinen går sönder med intensitet 0.5 (fel per timme). Felen kan vara av två olika slag, vilka inträffar med lika stor sannolikhet och oberoende av tidigare feltillfällen. Reparationstiderna är exponentialfördelade med väntevärde 20 minuter för den ena feltypen och 40 minuter för den andra.

- (a) Bestäm, då systemet är i jämvikt maskinens tillgänglighet, dvs. den andel av tiden den är i drift.
- (b) Vad kan man säga om tillgängligheten, i det långa loppet, om reparationstiderna inte är exponentialfördelade, men fortfarande har väntevärden 20 respektive 40 minuter, och är likafördelade för var och en av feltyperna?

5. En tidsserie $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n - \frac{1}{3}Y_{n-1} + \frac{1}{2}Y_{n-2} = X_n,$$

där $\{X_n\}$ är vitt brus med standardavvikelse 2.

- (a) Vad kallas denna typ av tidsserie?
- (b) Är $\{Y_n\}$ stationär?
- (c) Bestäm kovariansfunktionen, $r_Y(\tau)$, för $\tau = 0, 1, 2$.

6. Ett system består av fyra enheter, E_1 , E_2 , E_3 och E_4 , och fungerar så länge både E_1 och E_2 samt minst en av E_3 och E_4 fungerar. Komponenterna, som är av samma typ, fungerar oberoende av varandra och går sönder med samma konstanta intensitet $\lambda = 1$ (fel per år).

- (a) Illustrera systemet grafiskt.
- (b) Bestäm systemets överlevnadsfunktion.
- (c) Vilken medellivslängd har systemet?
- (d) När systemet slutar att fungera finns tre olika orsaker, nämligen att E_1 eller E_2 eller både E_3 och E_4 har slutat fungera. Med vilka sannolikheter inträffar de tre olika alternativen (givet att systemet har havererat)?

7. En Markovprocess i kontinuerlig tid $\{X(t), t \geq 0\}$ med tillstånd E_1 , E_2 , E_3 och E_4 har intensitetsmatris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tillståndet E_4 är alltså absorberande. Vid $t = 0$ startar processen i tillstånd E_1 . Låt Y vara tiden till absorption i E_4 . Beräkna $E(Y)$.