

- Alla fyra komponenterna har överlevnadsfunktion $R(t) = \exp\{-\int_0^t u^2/3 du\} = e^{-t^3/9}$.
 X = antalet som fungerar efter 2 dygn $\in \text{Bin}(4, R(2))$.
 - $R(2) = e^{-8/9} \approx 0.411$.
 - $P(X = 0) = (1 - R(2))^4 = (1 - e^{-8/9})^4 \approx 0.120$.
 - $P(X = 4) = R(2)^4 = e^{-32/9} \approx 0.0286$.
 - $P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot R(2) \cdot (1 - R(2))^3 = 4 \cdot e^{-8/9} \cdot (1 - e^{-8/9})^3 \approx 0.336$.
 - $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - (1 - e^{-8/9})^4 - 4 \cdot e^{-8/9} \cdot (1 - e^{-8/9})^3 \approx 0.544$.
- Låt $X(t)$ = antalet bussar och $Y(t)$ = antalet lastbilar i intervallet $(0, t]$. Då är $\{X(t)\}$ och $\{Y(t)\}$ oberoende Poissonprocesser med intensiteter $\lambda_x = 10$ respektive $\lambda_y = 20$ (per timme). Med $Z(t) = X(t) + Y(t)$ blir även $\{Z(t)\}$ en Poissonprocess med intensitet $\lambda_z = \lambda_x + \lambda_y = 10 + 20 = 30$.
 - $X(1/6) \in \text{Po}(10/6)$, så att $P(X(1/6) = 0) = e^{-10/6} = e^{-5/3} \approx 0.189$.
 - $Y(1/6) \in \text{Po}(20/6)$. $P(\text{hon sitter kvar efter 10 minuter}) = P((X(1/6) = 0) \cup (Y(1/6) = 0)) = P(X(1/6) = 0) + P(Y(1/6) = 0) - P((X(1/6) = 0) \cap (Y(1/6) = 0)) = e^{-5/3} + e^{-10/3} - e^{-5/3} \cdot e^{-10/3} = e^{-5/3} + e^{-10/3} - e^{-5} \approx 0.218$.
 - Låt t vara godtycklig. $P(X(t) = Y(t) = 1 | X(t) + Y(t) = 2) = \frac{P((X(t) = 1) \cap (Y(t) = 1))}{P(Z(t) = 2)} = \frac{P((X(t) = 1)) \cdot P(Y(t) = 1)}{P(Z(t) = 2)} = \frac{10t e^{-10t} \cdot 20t e^{-20t}}{\frac{(30t)^2}{2!} e^{-30t}} = \frac{10 \cdot 20}{30^2/2} = \frac{4}{9} \approx 0.444$.
- Startfördelning: $p^{(0)} = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.
 - $P(E_1 \rightarrow E_4 \text{ i 3 steg}) = P(E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4) = p_{12} \cdot p_{23} \cdot p_{34} = 1 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/4$,
 $P(E_2 \rightarrow E_4 \text{ i 3 steg}) = P(E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4) = p_{23} \cdot p_{33} \cdot p_{34} = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$,
 $P(E_3 \rightarrow E_4 \text{ i 3 steg}) = P(E_3 \rightarrow E_3 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4) = p_{33} \cdot p_{33} \cdot p_{34} = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$
 och $P(E_4 \rightarrow E_4 \text{ i 3 steg}) = 0$.
 Betinga med avseende på starttillstånd.
 $P(E_4 \text{ efter tre övergångar}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0.125$.
 - $P(X_4 = E_4 | X_2 = E_2) = p_{24}^{(2)} = p_{23} \cdot p_{34} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
 - Eftersom man kan gå: $E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow E_4 \rightarrow E_1$ är kedjan irreducibel. Den är även aperiodisk eftersom $p_{33} = \frac{1}{2} > 0$. Då finns det en asymptotisk fördelning $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ med $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$, som ges av $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$, dvs. $\pi_1 = \frac{1}{2} \pi_2 + \pi_4$, $\pi_2 = \pi_1$, $\pi_3 = \frac{1}{2} \pi_2 + \frac{1}{2} \pi_3$ och $\pi_4 = \frac{1}{2} \pi_3$, vilket ger $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 2\pi_4$, så att $\pi = (\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7})$.
- Fel A har reparationstid $\in \text{Exp}(20)$ minuter, dvs. intensitet 3 (per timme). Fel B har reparationstid $\in \text{Exp}(40)$ minuter, dvs. intensitet 3/2 (per timme). Eftersom felen är lika sannolika inträffar de med intensitet $0.5/2 = 0.25$ vardera. Maskinen kan befinna sig i något av tre tillstånd: $\{\text{Hel}, A, B\}$.
 - Övergångarna beskrivs av en Markovkedja i kontinuerlig tid med intensitetsmatris

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.25 & 0.25 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1.5 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}$$
 Kedjan är irreducibel, så att det finns en asymptotisk fördelning $\pi = (\pi_H, \pi_A, \pi_B)$ med $\pi_H + \pi_A + \pi_B = 1$, som ges av $\pi \cdot \mathbf{A} = 0$, dvs. $0.5\pi_H = 3\pi_A + 1.5\pi_B$, $0.25\pi_H = 3\pi_A$ och $0.25\pi_H = 1.5\pi_B$, med lösning $\pi = (0.80, 0.067, 0.133)$. Maskinens tillgänglighet blir $\pi_H = 0.80$, eller 80%.

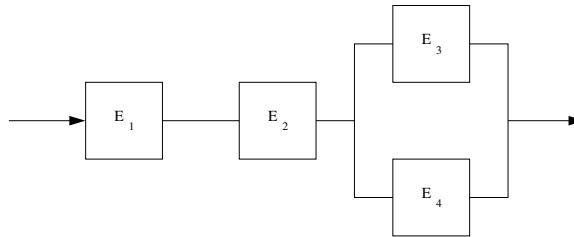
- (b) Systemet kan beskrivas av en alternerande förnyelseprocess, med omväxlande driftperioder, U_k och reparationsperioder, V_k , där $E(U_k) = 1/0.5 = 2$ och $E(V_k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{60} + \frac{1}{2} \cdot \frac{40}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Detta ger asymptotisk tillgänglighet: $\frac{E(U)}{E(U) + E(V)} = \frac{2}{2 + 0.5} = 0.80$.

5. $Y_n - \frac{1}{3}Y_{n-1} + \frac{1}{2}Y_{n-2} = X_n$, där $\{X_n\}$ är vitt brus med standardavvikelse 2 och varians 4.

- (a) AR(2); autoregressiv process av ordning 2.
 (b) $\{Y_n\}$ är stationär om filtret är stabilt. Det karakteristiska polynomet $A(z) = 1 - \frac{1}{3}z + \frac{1}{2}z^2$ har nollställen $z = (1 \pm i\sqrt{17})/3$ med $|z| = \sqrt{2} > 1$, så att filtret är stabilt.
 (c) Kovariansfunktionen, $r(\tau) = r_Y(\tau)$, bestäms med hjälp av Yule-Walker-ekvationerna:
 $4 = C(X_n, Y_n) = C(Y_n - \frac{1}{3}Y_{n-1} + \frac{1}{2}Y_{n-2}, Y_n) = r(0) - \frac{1}{3}r(1) + \frac{1}{2}r(2),$
 $0 = C(X_{n+1}, Y_n) = C(Y_{n+1} - \frac{1}{3}Y_n + \frac{1}{2}Y_{n-1}, Y_n) = r(1) - \frac{1}{3}r(0) + \frac{1}{2}r(1),$
 $0 = C(X_{n+2}, Y_n) = C(Y_{n+2} - \frac{1}{3}Y_{n+1} + \frac{1}{2}Y_n, Y_n) = r(2) - \frac{1}{3}r(1) + \frac{1}{2}r(0),$
 med lösning $r(0) = 432/77 \approx 5.61$, $r(1) = 96/77 \approx 1.25$ och $r(2) = -184/77 \approx -2.39$.

6. Enheterna är oberoende med överlevnadsfunktioner $R_i(t) = e^{-t}$, för $i = 1, 2, 3, 4$.

- (a) Systemet kan illustreras med figuren



- (b) Systemet får överlevnadsfunktion $R(t) = e^{-t} \cdot e^{-t} \cdot (1 - (1 - e^{-t})(1 - e^{-t})) = 2e^{-3t} - e^{-4t}$.
 (c) Systemets medellivslängd blir $\int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty (2e^{-3t} - e^{-4t}) dt = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12} \approx 0.417$.
 (d) För att funktionsstoppet ska bero på att både E_3 och E_4 gått sönder måste dessa gå sönder före E_1 och E_2 . Det finns 6 lika sannolika möjligheter till vilka som är de två första som går sönder, så att $P(\text{felet beror på } E_3 \text{ och } E_4) = 1/6$. Resten av felet beror på E_1 eller E_2 , vilka är lika sannolika, dvs. med sannolikhet $(1 - 1/6)/2 = 5/12$ vardera.
7. Låt e_{ij} = vara den förväntade tiden att gå från E_i till E_j . Sökt: $E(Y) = E(e_{14})$.

Väntetiderna i de olika tillstånden är exponentialfördelade med väntevärden = 1/intensiteten, dvs. 1/2 för E_1 och E_3 och 1 för E_2 .

Detta ger genom betingning på nästa övergång:

$$e_{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_{24} + \frac{1}{2}e_{34}, \quad e_{24} = 1 + e_{34} \text{ och } e_{34} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_{14}, \text{ vilket ger}$$

$$e_{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}e_{14} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e_{14} \right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e_{14}, \text{ så att}$$

$$E(Y) = e_{14} = 3.$$