

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, Tabeller över statistiska fördelningar, Beta Mathematics handbook och valfri räknedosa.

Uppgifterna 1 och 2 ger högst 5 poäng vardera, övriga uppgifter ger högst 6 poäng vardera.

1. En viss komponent har en livslängdsfördelning som ges av intensitetsfunktionen

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 < t \leq 1, \\ 2 & \text{om } t > 1. \end{cases}$$

Beräkna

- (a) sannolikheten att komponenten fungerar minst två tidsenheter,
 - (b) sannolikheten att komponenten fungerar ytterligare minst två tidsenheter om den fortfarande fungerar vid $t = 1$,
 - (c) komponentens förväntade livslängd.
2. Vid "shotgun sequencing" vill man skjuta sönder en DNA-sträng i korta bitar för sekvensering. Antag att en DNA-sträng av längd 2 (i någon enhet) klipps sönder i punkter som ges av en Poisson-process med intensitet $\lambda = 2$ (per längdenhet).
Beräkna sannolikheten att
- (a) få exakt ett klipp i den första halvan av strängen,
 - (b) få totalt tre klipp i hela strängen,
 - (c) få exakt ett klipp i den första halvan givet att man fått totalt tre klipp,
 - (d) få exakt två klipp i den första halvan givet att man fått totalt tre klipp,
 - (e) totalt få tre klipp givet att man fått ett klipp i den första halvan.
3. En teckenföljd byggs upp av de tre tecknen A, B och C. Det första tecknet i följdén väljs helt slumpmässigt medan resten av tecknen väljs enligt följande metod:
Ett A följs med sannolikhet 0.4 av ytterligare ett A, med sannolikhet 0.3 av ett B och med sannolikhet 0.3 av ett C.
Ett B följs med sannolikhet 0.6 av ytterligare ett B, med sannolikhet 0.2 av ett A och med sannolikhet 0.2 av ett C.
Ett C följs med sannolikhet 0.4 av ytterligare ett C, med sannolikhet 0.6 av ett B och aldrig av ett A.
- (a) Motivera att följdén kan beskrivas av en Markovkedja och ange dess övergångsmatris.
 - (b) Med vilken sannolikhet inleds följdén av sekvensen ACB?
 - (c) Existerar det en asymptotisk fördelning? Beräkna i så fall denna.

Var god vänd!

4. Betrakta åter teckenföljden i föregående uppgift. Om vi klipper upp följden efter varje B som förekommer får vi ett antal B-block med olika längder (antalet tecken i blocket). Alla dessa längder, utom den första, kommer att ha samma fördelning (behöver inte visas). Bestäm den förväntade längden av
- (a) det andra B-blocket,
 - (b) det första B-blocket.
5. På en verkstad finns en maskin och en reparatör. Maskinen går under drift sönder med intensitet 0.5 (fel per timme). Vid fel påbörjas omedelbart en reparation som tar en exponentialfördelad tid, med väntevärde 20 minuter. Efter reparationen måste maskinen testköras vilket också tar en exponentialfördelad tid, med väntevärde 10 minuter. Alla reparations- och testkörningstider kan anses vara oberoende av varandra.
- (a) Beskriv maskinens tillstånd med hjälp av en lämplig Markovprocess.
 - (b) Bestäm, då systemet är i jämvikt, maskinens tillgänglighet, dvs. den andel av tiden den är i drift.
6. Ett system består av tre enheter, E_1 , E_2 och E_3 och fungerar så länge E_1 eller både E_2 och E_3 fungerar. Komponenterna, som är av samma typ, fungerar oberoende av varandra och går sönder med samma konstanta intensitet $\lambda = 1$ (fel per år).
- (a) Illustrera systemet grafiskt.
 - (b) Bestäm systemets överlevnadsfunktion.
 - (c) Beräkna systemets medellivslängd.
7. Låt $\{X_n\}$ vara vitt brus, dvs. oberoende stokastiska variabler med väntevärde 0 och varians σ^2 . Definiera tidsserien $\{Z_n\}$ genom $Z_n = X_n - 0.5 \cdot X_{n-1}$ och tidsserien $\{Y_n\}$ genom $Y_n + 0.5 \cdot Y_{n-1} = Z_n$. Observera att Z_n inte beror av X_{n+k} för $k > 0$, varför inte heller Y_n beror av dessa framtida X -värden.
- (a) Vad kallas tidsserien $\{Z_n\}$? Beräkna dess kovariansfunktion.
 - (b) Tidsserien $\{Y_n\}$ kan ses som utsignalen till ett AR(1)-filter då insignalen är en MA(1)-process (eller ekvivalent som utsignalen från ett MA(1)-filter då insignalen är en AR(1)-process) och kallas därför en ARMA(1,1)-process. Bestäm $C(Y_{n-k}, Z_n)$ för $k = 0, 1, 2$.
 - (c) Bestäm kovariansfunktionen, $r_Y(\tau)$, för $\tau = 0, 1, 2$.

Anmärkning: ARMA-processer ingår inte i kursen, men kovariansfunktionen r_Y kan beräknas med hjälp av Yule-Walker-tekniken, som för en AR-process, med utnyttjande av resultatet i (b).