

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, Tabeller över statistiska fördelningar, Beta Mathematics handbook och valfri räknedosa.

Uppgifterna 1 och 2 ger högst 5 poäng vardera, övriga uppgifter ger högst 6 poäng vardera.

1. En komponent har felintensitet $\lambda(t) = 1 - \frac{1}{1+t}$.
Bestäm komponentens
 - (a) överlevnadsfunktion,
 - (b) förväntade livslängd.

2. I fotbollsmatcher mellan Alsjön och Bredbyn tillkommer målen så slumpmässigt att man anser att följande modell ger en god beskrivning av skeendet: Alsjön och Bredbyn gör mål enligt oberoende Poissonprocesser med intensiteter 1 mål per match för Alsjön och 2 mål per match för Bredbyn.
Beräkna sannolikheten att en match mellan lagen slutar med att
 - (a) Alsjön vinner med 1 – 0,
 - (b) Alsjön inte gör något mål,
 - (c) andra halvlek blir mållös,
 - (d) lagen gör totalt 3 mål,
 - (e) Alsjön inte gör något mål givet att lagen gör totalt 3 mål.

3. Herr Blom, som bor i ett hus med två ytterdörrar, äger 4 par uteskor. Vid inflyttningen ställer han 2 par vid vardera dörren.
När han skall ta sin dagliga promenad väljer han slumpmässigt en av dörrarna och tar på sig ett par skor (om där finns några, annars går han till den andra dörren).
Efter promenaden återvänder han slumpmässigt till en av dörrarna och ställer av sig skorna där.
Låt X_n = antalet par skor vid den ena dörren efter n dagar.
 - (a) Motivera att $\{X_n\}$ är en Markovkedja och ange dess begynnelsefördelning $p^{(0)}$ och övergångsmatris.
 - (b) Avgör om Markovkedjan har en asymptotisk fördelning, och bestäm i så fall denna.
 - (c) Hur ofta kommer herr Blom, i det långa loppet, att välja en dörr som saknar skor när han ska ut på promenad?

4. På en verkstad finns en maskin och en reparatör. Maskinen går sönder med intensitet 0.5 (fel per timme). Reparationerna består av två faser. Tiderna för dessa är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 20 minuter för den första fasen och 40 minuter för den andra.
 - (a) Bestäm, då systemet är i jämvikt, maskinens tillgänglighet, dvs. den andel av tiden den är i drift.
 - (b) Vad kan man säga om tillgängligheten, i det långa loppet, om tiderna i de två faserna inte är exponentialfördelade, men fortfarande har väntevärden 20 respektive 40 minuter?

Var god vänd!

5. Studera en maskin som kan vara i två tillstånd: drift och reparation. Låt $X(t) = 1$ om maskinen fungerar vid tid t och $X(t) = 0$ om den är under reparation. Under drift går maskinen sönder med konstant intensitet λ , och reparationstiderna är exponentialfördelade med intensitet μ , dvs. väntevärde $1/\mu$. Detta innebär att

$$\begin{aligned} P(X(t+h) = 0 \mid X(t) = 1) &= \lambda \cdot h + o(h) \\ P(X(t+h) = 1 \mid X(t) = 0) &= \mu \cdot h + o(h) \end{aligned}$$

Låt $P(t) = P(X(t) = 1)$.

- (a) Beräkna den asymptotiska fördelningen för $\{X(t)\}$.
- (b) Visa att $P(t)$ satisfierar differentialekvationen

$$P'(t) + (\lambda + \mu)P(t) = \mu.$$

Ledning: Studera $P(t+h)$ och betinga med avseende på $X(t)$.

- (c) Beräkna $P(t)$ i fallet $X(0) = 1$.
- (d) Beräkna $P(t)$ i fallet $X(0) = 0$.
- (e) Beräkna $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$, både i fallet $X(0) = 1$ och i fallet $X(0) = 0$.

I (c) och (d) får man naturligtvis använda differentialekvationen i (b) även om man inte lyckats härleda den!

6. En tidsserie $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n = X_n + 0.5 X_{n-1} - 0.5 X_{n-2},$$

där $\{X_n\}$ är vitt brus med varians $\sigma^2 = 4$. $\{Y_n\}$ har observerats för $n = 6$ och $n = 7$ med resultatet $y_6 = 2.463$ och $y_7 = 0.436$.

- (a) Vad kallas tidsserien $\{Y_n\}$?
- (b) Beräkna kovariansfunktionen för $\{Y_n\}$.
- (c) Bestäm den optimala linjära prediktorn av Y_9 .

7. En dataöverföring störs vid tidpunkter, vars avstånd är oberoende stokastiska variabler med väntevärde 2 sekunder. Efter varje störning återupptas överföringen och tidsförlusten för detta kan försummas.

Från början, och efter varje störning, är överföringshastigheten 1 Mbit/s. Om överföringen pågått störningsfritt i en sekund ökas överföringshastigheten till 2 Mbit/s. Hur lång tid tar det i genomsnitt att överföra 150 Mbit om avstånden mellan störningarna är

- (a) konstanta?
- (b) likformigt fördelade (rektangelfördelade) över intervallet $(0, 4)$?