

1. (a) $\int_0^t \lambda(s) ds = \int_0^t (1 - \frac{1}{1+s}) ds = t - \ln(1+t)$, så att
 $R(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda(s) ds\} = (1+t) \cdot e^{-t}$.
 (b) $E(T) = \int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty (1+t) \cdot e^{-t} dt = \int_0^\infty e^{-t} dt + \int_0^\infty t e^{-t} dt = 1 + 1 = 2$.
Anm. $T \in \Gamma(2, 1)$, vilket ger att $E(T) = 2$.
2. Låt $\{A(t)\}$ beskriva Alsjöns mål, så att $A(t) \in \text{Po}(t)$, $\{B(t)\}$ beskriva Bredbyns mål, så att $B(t) \in \text{Po}(2t)$ och $\{X(t) = A(t) + B(t)\}$ beskriva alla mål, så att $X(t) \in \text{Po}(3t)$.
 (a) $P(1-0) = P(A(1) = 1, B(1) = 0) = P(A(1) = 1) \cdot P(B(1) = 0) = e^{-1} \cdot e^{-2} = e^{-3} \approx 0.0498$,
 (b) $P(A(1) = 0) = e^{-1} \approx 0.368$,
 (c) antal mål i andra halvlek är $Y = X(1) - X(0.5) \in \text{Po}(3/2)$, så att $P(Y = 0) = e^{-3/2} \approx 0.223$,
 (d) $P(X(1) = 3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 4.5 e^{-3} \approx 0.224$,
 (e) $P(A(1) = 0 \mid X(1) = 3) = \frac{P(A(1) = 0, X(1) = 3)}{P(X(1) = 3)} = \frac{P(A(1) = 0, B(1) = 3)}{P(X(1) = 3)} =$
 $\frac{P(A(1) = 0) \cdot P(B(1) = 3)}{P(X(1) = 3)} = \frac{e^{-1} \cdot \frac{2^3}{3!} e^{-2}}{\frac{3^3}{3!} e^{-3}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27} \approx 0.296$.
Anm. $8/27 = (2/3)^3$; varje mål som tillkommer görs med sannolikhet $2/3$ av Bredbyn!
3. (a) $X_n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, med övergångssannolikheter enligt övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

 Startfördelning: $p^{(0)} = (0, 0, 1, 0, 0)$.
 (b) Kedjan är irreducibel (övergångarna $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ är möjliga) och aperiodisk (alla diagonalelement är > 0 !). Den asymptotiska fördelningen, π , ges av $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$, med $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$. Detta ger:
 $\pi_0 = 1/2\pi_0 + 1/4\pi_1$, dvs. $\pi_0 = \pi_1/2$,
 $\pi_1 = 1/2\pi_0 + 1/2\pi_1 + 1/4\pi_2$, vilket ger $\pi_1 = \pi_2$,
 $\pi_2 = 1/4\pi_1 + 1/2\pi_2 + 1/4\pi_3$, vilket ger $\pi_2 = \pi_3$,
 $\pi_3 = 1/4\pi_2 + 1/2\pi_3 + 1/2\pi_4$ och $\pi_4 = 1/4\pi_3 + 1/2\pi_4$, dvs. $\pi_4 = \pi_3/2$.
 Summan lika med 1 ger att $\pi_0 = \pi_4 = 1/8$ och $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = 1/4$.
 (c) $P(\text{Herr Blom väljer en skolös dörr}) = \pi_0 \cdot 1/2 + \pi_1 \cdot 0 + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3 \cdot 0 + \pi_4 \cdot 1/2 = 1/8 \cdot 1/2 + 1/8 \cdot 1/2 = 1/8$.
4. Processen har tre tillstånd: Hel, Fas 1 och Fas 2. De möjliga övergångarna inträffar med intensiteter: 0.5 (Hel $\rightarrow$ Fas 1), 3 (Fas 1 $\rightarrow$ Fas 2) och 3/2 (Fas 2 $\rightarrow$ Hel).

Var god vänd!

- (a) Övergångarna beskrivs av en Markovkedja i kontinuerlig tid med intensitetsmatris
- $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1.5 & 0 & -1.5 \end{pmatrix}.$$
- Kedjan är ändlig och irreducibel, så att det finns en asymptotisk fördelning $\pi = (\pi_H, \pi_1, \pi_2)$ med $\pi_H + \pi_1 + \pi_2 = 1$, som ges av $\pi \cdot \mathbf{A} = 0$, dvs. $0.5\pi_H = 1.5\pi_2$, $0.5\pi_H = 3\pi_1$ och $3\pi_1 = 1.5\pi_2$, med lösning $\pi = (2/3, 1/9, 2/9)$. Maskinens tillgänglighet blir $\pi_H = 2/3$.
- (b) Systemet kan beskrivas av en alternerande förnyelseprocess, med omväxlande driftperioder, U_k och reparationsperioder, V_k , där $E(U_k) = 1/0.5 = 2$ och $E(V_k) = E(T_1) + E(T_2) = 1/3 + 2/3 = 1$. Detta ger asymptotisk tillgänglighet: $\frac{E(U)}{E(U) + E(V)} = \frac{2}{2+1} = 2/3$.

5. Processen har två tillstånd, 0 och 1, med övergångsintensiteter: λ ($1 \rightarrow 0$) respektive μ ($0 \rightarrow 1$).

- (a) $\pi_1\lambda = \pi_0\mu$, med $\pi_0 + \pi_1 = 1$ ger $\pi_0 = \lambda/(\lambda + \mu)$ och $\pi_1 = \mu/(\lambda + \mu)$.
- (b) $P(t+h) = P(X(t+h)=1) = P(X(t)=0) \cdot P(X(t+h)=1 | X(t)=0) + P(X(t)=1) \cdot P(X(t+h)=1 | X(t)=1) = (1-P(t)) \cdot (\mu h + o(h)) + P(t) \cdot (1-\lambda h + o(h)) = P(t) - P(t)(\lambda + \mu)h + \mu h + o(h)$, så att $(P(t+h) - P(t))/h = -P(t)(\lambda + \mu) + \mu + o(h)/h$, vilket då $h \rightarrow 0$ ger $P'(t) = -P(t)(\lambda + \mu) + \mu$, dvs. $P'(t) + P(t)(\lambda + \mu) = \mu$. Lösning med integrerande faktor ger $P(t) = \mu/(\lambda + \mu) + C \cdot e^{-(\lambda + \mu)t}$.
- (c) $X(0) = 1 \Rightarrow P(0) = 1 \Rightarrow C = \lambda/(\lambda + \mu)$, dvs. $P(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$.
- (d) $X(0) = 0 \Rightarrow P(0) = 0 \Rightarrow C = -\mu/(\lambda + \mu)$, dvs. $P(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda + \mu)t}$.
- (e) $e^{-(\lambda + \mu)t} \rightarrow 0$ då $t \rightarrow \infty$, så att $P(t) \rightarrow \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \pi_1$ i båda fallen.

6. $Y_n = X_n + 0.5 X_{n-1} - 0.5 X_{n-2}$, där $\{X_n\}$ är vitt brus med varians $\sigma^2 = 4$.

- (a) MA(2); glidande medelvärdesprocess av ordning 2.
- (b) $r_y(0) = \sigma^2 \cdot (1^2 + (0.5)^2 + (-0.5)^2) = 4 \cdot 1.5 = 6$, $r_y(1) = \sigma^2 \cdot (1 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot (-0.5)) = 4 \cdot 0.25 = 1$, $r_y(2) = \sigma^2 \cdot (1 \cdot (-0.5)) = -2$. $r_y(k) = 0$ för $k \geq 3$ och $r_y(-k) = r_y(k)$.
- (c) Y_9 predikteras med $\hat{Y}_9 = a Y_6 + b Y_7$, där a och b ges av normalekvationerna:
 $0 = C(Y_9 - \hat{Y}_9, Y_6) = C(Y_9 - a Y_6 - b Y_7, Y_6) = r_y(3) - a r_y(0) - b r_y(1) = -6a - b$,
 $0 = C(Y_9 - \hat{Y}_9, Y_7) = C(Y_9 - a Y_6 - b Y_7, Y_7) = r_y(2) - a r_y(1) - b r_y(0) = -2 - a - 6b$,
 så att $b = -6a$ och $2 = 35a$, dvs. $a = 2/35$ och $b = -12/35$,
 vilket ger $\hat{Y}_9 = \frac{2}{35} 2.463 - \frac{12}{35} 0.436 = -0.0087$.

7. Låt $\{U_n\}$ vara avstånden mellan störningarna. $\{U_n\}$ genererar då en förnyelseprocess med $E(U_n) = 2$. Inför belöningar $\{R_n\}$ där R_n är mängden data som överförts under intervallet U_n , dvs. $R_n = U_n$ om $U_n < 1$ och $R_n = 1 + 2(U_n - 1) = 2U_n - 1$ om $U_n > 1$. Genomsnittlig överföring per tidsenhet blir då $E(R_n)/E(U_n) = E(R_n)/2$ och förväntad tid att överföra 150 Mbit därigenom $150/(E(R_n)/2) = 300/E(R_n)$.

- (a) $U_n = 2$ ger $R_n = 3$ dvs. förväntad tid $300/3 = 100$ sekunder.
- (b) $U_n \in \text{Re}(0, 4)$ (med täthet $f(u) = 1/4$ för $0 < u < 4$) ger
- $$E(R_n) = \int_0^1 u \cdot \frac{1}{4} du + \int_1^4 (2u - 1) \cdot \frac{1}{4} du = \frac{1}{8} + 3 = \frac{25}{8},$$
- dvs. förväntad tid $300/(25/8) = 2400/25 = 96$ sekunder.

Anm. Med exponentialfördelade U_n minskar den förväntade överföringstiden ytterligare, till 93.4 sekunder.