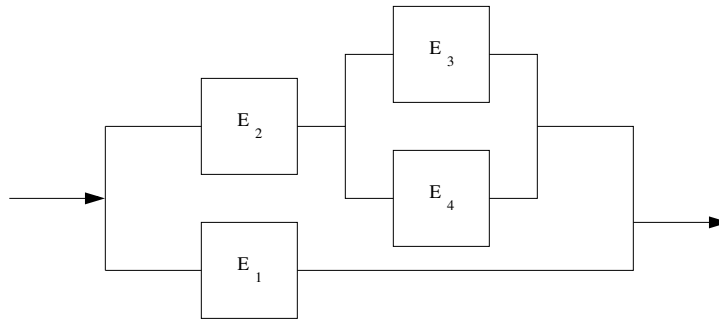


Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, Tabeller över statistiska fördelningar, Beta Mathematics handbook och valfri räknedosa.

Uppgifterna 1 och 2 ger högst 5 poäng vardera, övriga uppgifter ger högst 6 poäng vardera.



1. I systemet ovan har komponenterna oberoende livslängder, alla med felintensitet 2 fel per år. Bestäm systemets
 - (a) funktionssannolikhet,
 - (b) förväntade livslängd.
2. Vid en industri inträffar olyckstillbud enligt en Poissonprocess med intensitet 5 tillbud per år. Varje tillbud leder, oberoende av övriga tillbud, till en olycka med sannolikhet 0.2. Beräkna sannolikheten att, under ett år,
 - (a) det första halvåret är fritt från tillbud,
 - (b) det inte inträffar några olyckor,
 - (c) det under det första halvåret inträffar exakt 3 tillbud,
 - (d) det första halvåret är olycksfritt givet att det inträffat exakt 3 tillbud under halvåret,
 - (e) det första halvåret är olycksfritt givet att det inträffat exakt 3 tillbud under året.
3. I en urna ligger 3 vita kulor och i en annan urna ligger 3 svarta kulor. Med jämna mellanrum utförs följande slumpförsök: Ta en slumpmässigt vald kula ur den första urnan och låt den byta plats med en slumpmässigt vald kula ur den andra. Låt X_n = antalet vita kulor i den första urnan efter n försök.
 - (a) Motivera att $\{X_n\}$ är en Markovkedja och ange dess begynnelsefördelning $p^{(0)}$ och övergångsmatris.
 - (b) Motivera att det finns en asymptotisk fördelning och bestäm den.
 - (c) Hur ofta kommer, i det långa loppet, alla vita kulor att ligga i samma urna?

Anm. Modellen ovan är ett enkelt specialfall av Ehrenfests urnmodell.

4. Till ett självbetjäningssystem (med plats för många kunder samtidigt) anländer kunder enligt en Poissonprocess med intensitet 0.5 per minut. Kunderna stannar i systemet exakt en minut. Betrakta systemet då det är i jämvikt (dvs. efter lång tid).

- (a) Bestäm fördelningen för antalet kunder vid en viss tidpunkt.
 - (b) Om det vid en viss tidpunkt är 1 kund i systemet, vad är sannolikheten att det en halv minut senare också är 1 kund i systemet?
 - (c) Om det vid två tidpunkter med en halv minuts mellanrum finns 1 kund i systemet, vad är sannolikheten att det är samma kund?
5. En bensinmotor kan stanna dels på grund av bränslefel och dels på grund av tändningsfel. När motorn går inträffar dessa fel oberoende av varandra med intensiteter λ_B respektive λ_T . Reparationstiderna är exponentialfördelade med väntevärden $1/\mu_B$ respektive $1/\mu_T$.
- (a) Beräkna, under jämvikt, sannolikheten att motorn fungerar.
 - (b) Hur skulle svaret i (a) påverkas om reparationstiderna inte antas vara exponentialfördelade, men fortfarande ha samma väntevärden?

6. En tidsserie $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n - Y_{n-1} + 0.4 Y_{n-2} = X_n,$$

där $\{X_n\}$ är vitt brus med varians $\sigma^2 = 3.2$.

- (a) Vad kallas processen $\{Y_n\}$?
 - (b) Motivera att processen $\{Y_n\}$ är stationär.
 - (c) Beräkna kovariansfunktionen $r_Y(\tau)$ för $\{Y_n\}$ för $\tau = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$.
7. En Markovkedja, med tillstånd E_1, E_2, E_3, E_4 har övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Låt T_{ij} vara antalet steg som krävs för att nå tillstånd E_j vid start i E_i och låt $e_{ij} = E(T_{ij})$. Bestäm

- (a) e_{11}, e_{22}, e_{33} och e_{44} ,
- (b) e_{21}, e_{31} och e_{41} .