

1. (a)  $R(t) = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(s) ds \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \frac{s}{4} ds \right\} = \exp \left\{ - t^2/8 \right\}.$

(b)  $R(2) = e^{-4/8} = e^{-1/2} \approx 0.607.$

(c) Låt  $T_1$  beteckna den återstående livslängden efter 1 dygn.

$$R_{T_1}(t) = \frac{R(t+1)}{R(1)} = \frac{\exp \left\{ - (t+1)^2/8 \right\}}{\exp \left\{ - 1/8 \right\}} = \exp \left\{ \frac{1 - (t+1)^2}{8} \right\}.$$

$$\text{Så } R_{T_1}(2) = \exp \left\{ \frac{1 - (2+1)^2}{8} \right\} = e^{-1} \approx 0.368.$$

2. Definera följande tre processer:

$X(t)$  = antalet fiskar Per fångar under intervallet  $[0, t]$

$Y(t)$  = antalet fiskar Thomas fångar under intervallet  $[0, t]$

$Z(t)$  = antalet fiskar de fångar tillsammans under intervallet  $[0, t]$ .

Då  $\{X(t), t \geq 0\}$  och  $\{Y(t), t \geq 0\}$  är Poisson-processer vet vi att  $X(t) \in \text{Po}(2t)$  och  $Y(t) \in \text{Po}(3t)$  för varje fixt  $t \geq 0$ . Vidare är  $Z(t) = X(t) + Y(t)$  så även  $\{Z(t), t \geq 0\}$  är en Poisson-process och  $Z(t) \in \text{Po}(5t)$  för varje fixt  $t \geq 0$ .

Speciellt gäller  $X(1) \in \text{Po}(2)$ ,  $Y(1) \in \text{Po}(3)$  och  $Z(1) \in \text{Po}(5)$ .

(a)  $P(Z(1) = 0) = e^{-5} \approx 0.0067.$

(b)  $P(Z(1) = 3) = \frac{5^3}{3!} e^{-5} = \frac{125}{6} e^{-5} \approx 0.140.$

(c) Kom ihåg att  $Z(t)$  är beroende av såväl  $X(t)$  som  $Y(t)$ . Däremot är  $X(t)$  och  $Y(t)$  oberoende av varandra (vilket utnyttjas i steg 3 nedan).

$$\begin{aligned} P(Y(1) = 3 \mid Z(1) = 3) &= \frac{P(Y(1) = 3, Z(1) = 3)}{P(Z(1) = 3)} = \frac{P(Y(1) = 3, X(1) = 0)}{P(Z(1) = 3)} \\ &= \frac{P(Y(1) = 3) \cdot P(X(1) = 0)}{P(Z(1) = 3)} = \frac{\frac{3^3}{3!} e^{-3} \cdot e^{-2}}{\frac{5^3}{3!} e^{-5}} \\ &= \left( \frac{3}{5} \right)^3 = \frac{27}{125} \approx 0.216. \end{aligned}$$

(d) Låt  $t$  vara godtyckligt.

$$\begin{aligned} P(Y(t) = 1 \mid Z(t) = 1) &= \frac{P(Y(t) = 1, Z(t) = 1)}{P(Z(t) = 1)} = \frac{P(Y(t) = 1, X(t) = 0)}{P(Z(t) = 1)} \\ &= \frac{P(Y(t) = 1) \cdot P(X(t) = 0)}{P(Z(t) = 1)} = \frac{3t e^{-3t} \cdot e^{-2t}}{5t e^{-5t}} = \frac{3}{5}. \end{aligned}$$

(e) Vid varje tidpunkt gäller att  $P(\text{Thomas får nästa fisk}) = 3/5$ , vilket ger att  $P(\text{Thomas får de tre första fiskarna}) = (3/5)^3 = 27/125 \approx 0.216.$

3. Poisson-processen  $\{X(t), t \geq 0\}$  har väntevärdessfunktion  $m_X(t) = E(X(t)) = \lambda t$  och kovariansfunktion

$$\begin{aligned} r_X(s, s+t) &= C(X(s), X(s+t)) = C(X(s), X(s+t) - X(s) + X(s)) \\ &= C(X(s), X(s+t) - X(s)) + C(X(s), X(s)) = 0 + v_X(s) \\ &= \lambda s, \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Då  $Y(t) = (X(t+1) - X(t)) \in \text{Po}(\lambda)$  för varje fixt  $t \geq 0$  får vi väntevärdessfunktionen

$$m_Y(t) = E(Y(t)) \equiv \lambda.$$

Kovariansfunktion ges av

$$\begin{aligned} r_Y(s, s+t) &= C(Y(s), Y(s+t)) = C(X(s+1) - X(s), X(s+t+1) - X(s+t)) \\ &= C(X(s+1), X(s+t+1)) - C(X(s+1), X(s+t)) \\ &\quad - C(X(s), X(s+t+1)) + C(X(s), X(s+t)) \\ &= \lambda(s+1) - \lambda \min(s+1, s+t) - \lambda s + \lambda s \\ &= \lambda(s+1) - \lambda(s + \min(1, t)) = \lambda(1 - \min(1, t)) \\ &= \lambda \cdot \max(0, 1-t), \quad \forall s, t \geq 0. \end{aligned}$$

- (b)  $Y$ -processen är svagt stationär, eftersom väntevärdessfunktionen  $m_Y(t)$  är konstant och kovariansfunktionen  $r(s, s+t)$  inte beror av  $s$ .

4. (a) Låt  $S$  beteckna hela systemet och definiera sedan delsystemen  $S_1 = S \mid D$  och  $S_2 = S \mid D^*$ . Då är

$$\begin{aligned} R(t) &= P(S \mid D)P(D) + P(S \mid D^*)P(D^*) = P(S_1)P(D) + P(S_2)(1 - P(D)) \\ &= R_{S_1}(t)R_D(t) + R_{S_2}(t)(1 - R_D(t)) \\ &= (2e^{-t} - e^{-2t})e^{-2t} + (2e^{-3t} - e^{-6t})(1 - e^{-2t}) \\ &= 4e^{-3t} - e^{-4t} - 2e^{-5t} - e^{-6t} + e^{-8t} \end{aligned}$$

ty lagarna för serie- och parallellkoppling ger

$$\begin{aligned} R_{S_1}(t) &= P(A \cup B) = 1 - (1 - R_A(t))(1 - R_B(t)) = 1 - (1 - R_A(t))^2 \\ &= 1 - (1 - e^{-t})^2 = 2e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{S_2}(t) &= P((A \cap C) \cup (B \cap E)) = 1 - (1 - R_{A \cap C}(t))(1 - R_{B \cap E}(t)) \\ &= 1 - (1 - R_{A \cap C}(t))^2 = 1 - (1 - R_A(t)R_C(t))^2 \\ &= 1 - (1 - e^{-t}e^{-2t})^2 = 1 - (1 - e^{-3t})^2 = 2e^{-3t} - e^{-6t}. \end{aligned}$$

**Anm:** Det går även bra att lösa uppgiften genom att räkna på de fyra olika vägarna genom systemet:  $V_1 = AC$ ,  $V_2 = AD$ ,  $V_3 = BD$  och  $V_4 = BE$ .

- (b) Systemets förväntade livslängd ges av

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty R(t) dt = \int_0^\infty (4 \cdot e^{-3t} - e^{-4t} - 2 \cdot e^{-5t} - e^{-6t} + e^{-8t}) dt \\ &= \left[ -\frac{4}{3}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^{-4t} + \frac{2}{5}e^{-5t} + \frac{1}{6}e^{-6t} - \frac{1}{8}e^{-8t} \right]_0^\infty \\ &= \frac{4}{3} - \frac{1}{4} - \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{77}{120} \approx 0.642 \text{ år}. \end{aligned}$$