

1. (a) Förflyttningarna kan beskrivas av en Markovkedja ty nästa förflyttning beror bara på vilken cell musen befinner sig i just nu och inte av hur den kom dit. Övergångsmatris:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Musen startar i cell G så initialvektorn $p^{(0)} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$. Enligt Chapman-Kolmogorovs sats är

$$p^{(1)} = p^{(0)} \cdot \mathbf{P} = (1/3, 1/3, 0, 0, 0, 1/3, 0),$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{18}(4, 1, 3, 1, 3, 1, 5),$$

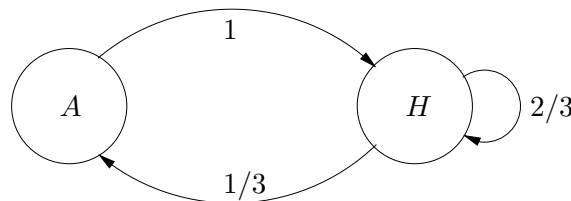
$$p^{(3)} = p^{(2)} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{27}(7, 5, 2, 4, 2, 5, 2),$$

$$p^{(4)} = p^{(3)} \cdot \mathbf{P} = \frac{1}{162}(40, 15, 25, 15, 25, 15, 27),$$

så att sannolikheten att musen befinner sig i cell A efter fyra cellbyten är

$$p_A^{(4)} = 40/162 = 20/81 \approx 0.247.$$

Observera att modellen kan förenklas avsevärt när just våra uppgifter ska lösas. Pga symmetri hos "hörntillstånden" $B - G$ kan vi betrakta dem som ett enda tillstånd, $H = \{B, C, D, E, F, G\}$. Det nya tillståndsrummet blir då $E = \{A, H\}$ och man får följande övergångsdiagram:



Initialvektorn blir $p^{(0)} = (0, 1)$ eftersom musen startar i ett hörn och den nya övergångsmatrisen blir

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Således är

$$p^{(4)} = p^{(0)} \tilde{\mathbf{P}}^4 = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}^4 = (20/81, 61/81)$$

och $p_A^{(4)} = 20/81 \approx 0.247$ som ovan.

- (c) Vi betraktar först den ursprungliga Markovkedjan med 7 tillstånd. Eftersom kedjan är ändlig och $p_{iA}^{(2)} > 0$ för $i = A, B, \dots, G$, så existerar en asymptotisk fördelning π , med $\pi_A + \dots + \pi_G = 1$, som ges av $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$. Den första ekvationen är

$$\pi_A = \frac{1}{3}(\pi_B + \dots + \pi_G) = \frac{1}{3}(1 - \pi_A),$$

så att $\frac{4}{3}\pi_A = \frac{1}{3}$ vilket ger

$$\pi_A = 1/4 = 0.25.$$

I jämvikt, dvs efter *många* cellbyten, så gäller alltså att sannolikheten att musen befinner sig i cell A är 0.25, vilket faktiskt inte skiljer sig så mycket från resultatet i (b).

Om vi istället väljer att arbeta med den reducerade kedjan med endast 2 tillstånd så kan vi motivera att den asymptotiska fördelningen existerar på två olika sätt:

Alt 1: Markovkedjan är ändlig, irreducibel (ty alla tillstånd kommunicerar) och aperiodisk (ty irreducibel och $p_{HH} > 0$).

Alt 2: Markovkedjan är ändlig och samtliga element i sista kolonnen i $\tilde{\mathbf{P}}$ är nollskilda.

Den asymptotiska fördelningen fås som tidigare genom att beräkna den *unika* stationära fördelningen π .

$$\begin{cases} \pi = \pi \tilde{\mathbf{P}} \\ \pi_A + \pi_H = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (\pi_A, \pi_H) = (1/4, 3/4)$$

2. Låt

$X_n =$ antalet röda kulor i den första urnan efter n byten

Tillståndsrummet $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

- (a) Övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/9 & 4/9 & 4/9 & 0 \\ 0 & 4/9 & 4/9 & 1/9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

För att få fram de två första raderna kan man resonera som följer (övriga rader ges på samma sätt): Om kedjan befinner sig i tillstånd 0 så finns det 0 röda kulor (= 3 vita kulor) i den första urnan och 3 röda kulor i den andra urnan. Efter nästa byte måste det alltså alltid finnas 1 röd i den första urnan så det första raden i övergångsmatrisen blir 0, 1, 0, 0.

Om kedjan befinner sig i tillstånd 1 så finns det 1 röd och 2 vita kulor i den första urnan och 2 röda samt 1 vit kula i den andra urnan. Efter nästa byta hamnar kedjan i tillstånd 0 om vi väljer den röda kulan ur den första urnan och den vita kulan ur den andra urnan. Sannolikheten för detta är $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Kedjan stannar kvar i tillstånd 1 om vi väljer en vit ur den första urnan och den vita ur den andra urnan (sannolikhet $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$) eller om vi väljer den röda ur den första urnan och en röd ur den andra urnan (sannolikhet $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$). Sannolikheten att stå kvar i tillstånd 1 blir $\frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{4}{9}$. Kedjan går till tillstånd 2 om vi väljer en vit ur den första urnan och en röd ur den andra urnan (sannolikhet $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$). Kedjan kan aldrig gå från tillstånd 1 till tillstånd 3. Detta ger att den andra raden i övergångsmatrisen blir 1/9, 4/9, 4/9, 0.

- (b) Det ursprungliga antalet röda kulor i den första urnan X_0 ges av antalet gånger som krona erhålls vid 3 singlar med ett välbalanserat mynt. Alltså är $X_0 \in \text{Bin}(3, 1/2)$, dvs

$$P(X_0 = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

och initialfördelningen

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= (P(X_0 = 0), P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), P(X_0 = 3)) \\ &= \frac{1}{8}(1, 3, 3, 1). \end{aligned}$$

- (c) Eftersom kedjan är ändlig, irreducibel och aperiodisk så existerar det en asymptotisk fördelning π , med $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, som ges av $\pi = \pi \cdot \mathbf{P}$, dvs

$$\begin{cases} \pi_0 = \frac{1}{9}\pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 + \frac{4}{9}\pi_1 + \frac{4}{9}\pi_2 \\ \pi_2 = \frac{4}{9}\pi_1 + \frac{4}{9}\pi_2 + \pi_3 \\ \pi_3 = \frac{1}{9}\pi_2 \end{cases}$$

Ekvationssystemet ger $\pi_1 = \pi_2 = 9\pi_0 = 9\pi_3$ så att

$$1 = \pi_0 \cdot (1 + 9 + 9 + 1) = 20\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = 1/20.$$

Den asymptotiska fördelningen blir

$$\pi = (1/20, 9/20, 9/20, 1/20) = (0.05, 0.45, 0.45, 0.05).$$

3. Låt

$X(t)$ = antalet bilar på parkeringen vid tidpunkt t

Då gäller att $\{X(t), t \geq 0\}$ är en födelse-dödsprocess med födelseintensiteter $\lambda_k = 5$ för $0 \leq k \leq 14$ och dödsintensiteter $\mu_k = k \cdot 1/3$ för $1 \leq k \leq 15$.

- (a) Eftersom kedjan har ändligt många tillstånd och är irreducibel så finns det en asymptotisk fördelning $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_{15})$, där $\pi_0 + \dots + \pi_{15} = 1$ och

$$\pi_k = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \cdots \mu_k} \pi_0 = \frac{5^k}{(1/3)^k \cdot k!} \pi_0 = \frac{15^k}{k!} \pi_0$$

Bivillkoret ger att

$$\sum_{k=0}^{15} \frac{15^k}{k!} \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1 / \sum_{k=0}^{15} \frac{15^k}{k!}$$

Speciellt gäller att

$$P(\text{alla platser upptagna}) = \pi_{15} = \frac{15^{15}}{15! \sum_{k=0}^{15} \frac{15^k}{k!}} \approx 0.180$$

Anmärkning: Beräkningarna kan förenklas med följande omskrivning

$$1 = \sum_{k=0}^{15} \frac{15^k}{k!} \pi_0 = \pi_0 \cdot e^{15} \cdot \sum_{k=0}^{15} \frac{15^k}{k!} e^{-15} = \pi_0 \cdot e^{15} \cdot P(Y \leq 15)$$

där $Y \in \text{Po}(15)$ så att $P(Y \leq 15) = 0.56809$ (Tabell 7). Detta ger att

$$\pi_0 = \frac{e^{-15}}{P(Y \leq 15)} \quad \text{och} \quad \pi_k = \frac{15^k}{k!} \pi_0 = \frac{P(Y = k)}{P(Y \leq 15)}.$$

(b) Låt n vara antalet platser. Då blir

$$P(\text{alla platser upptagna}) = \pi_n = \frac{15^n}{n! \sum_{k=0}^n \frac{15^k}{k!}}$$

$n = 19$ ger $\pi_{19} \approx 0.0637 > 0.05$, medan $n = 20$ ger $\pi_{20} \approx 0.0456 < 0.05$

Det krävs 20 platser.

4. Inför fem tillstånd: 0: "Ingen maskin trasig", A: "A trasig, B hel", B: "B trasig, A hel", AB: "Båda trasiga, A repareras" och BA: "Båda trasiga, B repareras". Detta ger följande intensitetsmatris:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -2.5 & 0.5 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -8 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & -6.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Den asymptotiska fördelningen π , med $\pi_0 + \pi_A + \pi_B + \pi_{AB} + \pi_{BA} = 1$, ges av $\pi \cdot \mathbf{Q} = 0$. Gausseliminering ger

$$\begin{pmatrix} -2.5 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ -0.5 & -8 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -6.5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2.5 & 6 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & -34/5 & 6/5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -29/34 & 6 & 144/34 \\ 0 & 0 & 0 & -102/29 & 102/29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Här ger den sista raden ingen information. Övriga rader ger att $\pi_{AB} = \pi_{BA}$, $\pi_B = 12\pi_{BA}$, $\pi_A = 3\pi_{BA}$ och $\pi_0 = 36\pi_{BA}$. Bivillkoret säger nu att

$$1 = \pi_{BA} \cdot (36 + 3 + 12 + 1 + 1) = 53\pi_{BA}$$

så $\pi_{BA} = 1/53$. Den asymptotiska fördelningen blir $\pi = \frac{1}{53}(36, 3, 12, 1, 1)$.

(a) $P(\text{A fungerar}) = \pi_0 + \pi_B = 36/53 + 12/53 = 48/53 \approx 0.906$.

$P(\text{B fungerar}) = \pi_0 + \pi_A = 36/53 + 3/53 = 39/53 \approx 0.736$

(b) $P(\text{Reparatören arbetar}) = 1 - \pi_0 = 1 - 36/53 = 17/53 \approx 0.321$.