

Senaste inlämningsdag: 15 oktober kl. 10:15.

OBS: Endast 3 uppgifter. Uppgift 1 ger maximalt 8p och uppgift 2 och 3 ger maximalt 6p.

1. I ett forskningslaboratorium utför man ett försök som vid vissa tillfällen ger värdefulla observationer. Efter att ha ställt upp försöksutrustningen inträffar en observation efter tiden X , där fördelningen för X bestäms av intensitetsfunktionen

$$\lambda(t) = \frac{2}{1+t}. \quad (\text{tidsenhet: timmar})$$

Varje observation ger en förtjänst på 2000 kronor. Så fort en observation erhålls måste dock försöksutrustningen återställas vilket medför en kostnad på 1000 kronor. (Tidsåtgången för återställandet kan försummas.)

Eftersom intensiteten $\lambda(t)$ är avtagande har man insett att det, om det har gått tillräckligt lång tid T sedan senaste observationen, ändå lönar sig att återställa utrustningen trots att man inte gjort någon observation.

Således blir tiderna mellan återställningarna oberoende stokastiska variabler $\{U_n\}$, där $U_n = \min(X_n, T)$ och en observation endast erhålls om $U_n < T$. I så fall inkasseras en delbelöning på $2000 - 1000 = 1000$ kr. Skulle och andra sidan $U_n = T$, uteblir belöningen och man drabbas enbart av delkostnaden 1000 kr för en återomställning.

- (a) Visa att, om X har överlevnadsfunktion $R(t)$, så gäller

$$E(\min(X, T)) = \int_0^T R(u) du.$$

- (b) Bestäm överlevnadsfunktionen $R(t)$ för X .
(c) Hur ska T väljas för att det ekonomiska utfallet per tidsenhet ska maximeras?
(d) Vad blir det optimala utfallet? Vad blir utfallet om man bara återställer försöks-utrustningen vid gjorda observationer, dvs $T = \infty$?

Anm: Klarar du inte visa (a) kan du använda formeln som en sats och ändå lösa (b)-(d).

2. AR(2)-processen $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n + \frac{1}{2} Y_{n-1} - \frac{1}{3} Y_{n-2} = X_n,$$

där $\{X_n\}$ är oberoende stokastiska variabler med väntevärde 0 och standardavvikelse 3.

- (a) $\{Y_n\}$ är utsignal till ett linjärt filter. Är filtret stabilt? (redovisa eventuella uträkningar)
- (b) Bestäm kovariansfunktionen, $r_Y(k)$, numeriskt för $k = 0, 1, \dots, 5$.

3. MA(3)-processen $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n = X_n + \frac{1}{2} X_{n-1} - \frac{1}{2} X_{n-2} + \frac{1}{4} X_{n-3},$$

där $\{X_n\}$ är vitt brus med varians σ^2 .

- (a) Bestäm kovariansfunktionen $r_Y(k)$, för $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, uttryckt i σ^2 .
- (b) Bestäm de optimala linjära prediktorerna av Y_6, Y_8 respektive Y_{10} om $Y_5 = 3.0$ har observerats.
- (c) Bestäm den optimala linjära prediktorn av Y_6 om $Y_5 = 3.0$ och $Y_4 = 4.2$ har observerats.