

1. (a) X är en stokastisk variabel med överlevnadsfunktion $R(t)$, täthetsfunktion $f(t)$ och fördelningsfunktion $F(t)$ för $t > 0$. T är en fixerad tidpunkt och därmed en konstant. Den stokastiska variabeln

$$U = \min(X, T) = \begin{cases} X, & X < T \\ T, & X \geq T \end{cases}$$

har således en *mixad fördelning* sådan att U har en täthet $f_U(t) = f(t)$ för alla $0 < t < T$ och en punktmassa i T sådan att

$$P(U = T) = P(X \geq T) = R(T).$$

Väntevärdet $E(U)$ ges nu av

$$\begin{aligned} E(U) &= \int_0^T t \cdot f_U(t) dt + T \cdot P(U = T) = \int_0^T t \cdot f(t) dt + T \cdot R(T) \\ &= \left[tF(t) \right]_0^T - \int_0^T F(t) dt + T \cdot R(T) \\ &= T \cdot F(T) - \int_0^T (1 - R(t)) dt + T \cdot R(T) \\ &= T(F(T) + R(T) - 1) + \int_0^T R(t) dt = \int_0^T R(t) dt \end{aligned}$$

vilket bevisar satsen.

- (b) Använd sambandet mellan intensitet och överlevnadsfunktion:

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(u) du \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t \frac{2}{1+u} du \right\} \\ &= \exp \left\{ - 2 \ln(1+t) \right\} = \frac{1}{(1+t)^2} \end{aligned}$$

- (c) **Förnyelser:** Låt varje återställning av försöksutrustningen vara en förnyelse. Förnyelseprocessen genereras då av följden $\{U_n\}$. Resultaten från (a) och (b) ger oss följande väntevärde för en förnyelsecykel:

$$\nu = E(U) = \int_0^T R(t) dt = \int_0^T \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^T = \frac{T}{1+T}$$

Belöning: Belöningen R_n som erhålles under förnyelsecykel U_n ges av

$$R_n = \begin{cases} 1000, & U < T \\ -1000, & U = T \end{cases}$$

ty varje cykel resulterar i en kostnad på 1000 kr för att återställa försöksutrustningen men det är bara då $U < T$ som vi inkasserar 2000 kr för en lyckad observation.

Den förväntade belöningen under en förnyelsecykel blir således

$$\begin{aligned} E(R) &= 1000 \cdot P(U < T) - 1000 \cdot P(U = T) \\ &= 1000(1 - R(T)) - 1000 \cdot R(T) = 1000 - 2000 \cdot R(T) \\ &= 1000 - \frac{2000}{(1+T)^2} = \frac{1000(T^2 + 2T - 1)}{(1+T)^2}. \end{aligned}$$

Belöningsatsen: Det ekonomiska utfallet per tidsenhet följer från belöningsatsen. Notera att detta utfall blir en funktion av T (som vi här valt att kalla $g(T)$).

$$g(T) = \frac{E(R)}{\nu} = \frac{1000(T^2 + 2T - 1)}{(1+T)^2} \bigg/ \frac{T}{1+T} = \frac{1000(T^2 + 2T - 1)}{T(1+T)}.$$

Maximal belöning uppnås då

$$g'(T) = -\frac{1000(T^2 - 2T - 1)}{T^2(T+1)^2} = 0$$

vilket inträffar när

$$T^2 - 2T - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 + \sqrt{2}.$$

Störst belöning får man alltså genom att återställa försöksutrustningen efter

$$T = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414 \text{ timmar} \approx 2 \text{ timmar och } 25 \text{ minuter.}$$

(d) Det förväntade antalet kronor man tjänar per timme med maximerad belöning:

$$g(1 + \sqrt{2}) \approx 1172,$$

och om vi endast återställer försöksutrustningen efter gjorda observationer:

$$g(\infty) = 1000.$$

En optimering ökar med andra ord vinsten med drygt 17%.

2. (a) Det karakteristiska polynomet $A(z) = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{3}z^2$ har nollställena

$$z_1 = \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \approx 2.64 \quad \text{och} \quad z_2 = \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \approx -1.14.$$

Båda nollställena är utanför enhetscirkeln så filtret är stabilt.

- (b) Kovariansfunktionen $r_Y = r$ ges av Yule-Walker-ekvationerna:
(Med $\sigma^2 = 9$, $a_1 = 1/2$ och $a_2 = -1/3$)

$$\begin{cases} 9 = r(0) + \frac{1}{2}r(1) - \frac{1}{3}r(2) \\ 0 = r(1) + \frac{1}{2}r(0) - \frac{1}{3}r(1) = \frac{2}{3}r(1) + \frac{1}{2}r(0) \\ 0 = r(2) + \frac{1}{2}r(1) - \frac{1}{3}r(0) \\ 0 = r(k) + \frac{1}{2}r(k-1) - \frac{1}{3}r(k-2), \quad \text{för } k \geq 2, \end{cases}$$

De tre första ekvationerna ger

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/3 \\ 1/2 & 2/3 & 0 \\ -1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vilket ger lösningen: $r(0) = 162/7$, $r(1) = -243/14$, $r(2) = 459/28$.

Övriga kovarianser kan nu beräknas (en efter en) utifrån den rekursiva formeln som ges av den fjärde ekvationen:

$$r(k) = -\frac{1}{2}r(k-1) + \frac{1}{3}r(k-2), \quad \text{för } k \geq 2.$$

Så

$$\begin{aligned} r(3) &= -\frac{1}{2}r(2) + \frac{1}{3}r(1) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{459}{28} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{243}{14}\right) = -\frac{783}{56} \\ r(4) &= -\frac{1}{2}r(3) + \frac{1}{3}r(2) = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{783}{56}\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{459}{28} = \frac{1395}{112} \\ r(5) &= -\frac{1}{2}r(4) + \frac{1}{3}r(3) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1395}{112} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{783}{56}\right) = -\frac{2439}{224}. \end{aligned}$$

Anm: Räknar man ut fler kovarianser ser man att beroendet är växelvis positivt/negativt och sakta men säkert konvergerar mot noll (vilket är ett krav för stabila filter).

$r(0) = 23.14$	$r(1) = -17.36$
$r(2) = 16.39$	$r(3) = -13.98$
$r(4) = 12.46$	$r(5) = -10.89$
$r(6) = 9.60$	$r(7) = -8.43$
$r(8) = 7.41$	$r(9) = -6.52$
$r(10) = 5.73$	$r(11) = -5.04$
$r(20) = 1.58$	$r(21) = -1.39$
$r(30) = 0.44$	$r(31) = -0.38$
$r(40) = 0.12$	$r(41) = -0.11$
$r(2k) \rightarrow 0 \quad \text{då } k \rightarrow \infty$	$r(2k+1) \rightarrow 0 \quad \text{då } k \rightarrow \infty$

3. (a) Kovariansfunktionen $r_Y = r$ ges av sats 10:
(Med $c_0 = 1$, $c_1 = 1/2$, $c_2 = -1/2$, och $c_3 = 1/4$)

$$\begin{aligned} r(0) &= \sigma^2 \cdot \left[1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right] = \frac{25}{16} \sigma^2 \\ r(1) &= \sigma^2 \cdot \left[1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{8} \sigma^2 \\ r(2) &= \sigma^2 \cdot \left[1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right] = -\frac{3}{8} \sigma^2 \\ r(3) &= \sigma^2 \cdot \left[1 \cdot \frac{1}{4} \right] = \frac{1}{4} \sigma^2 \\ r(k) &= 0 \quad \text{för } k \geq 4 \quad \text{och} \quad r(-k) = r(k) \end{aligned}$$

- (b) Prediktera $\hat{Y}_k$ med $\hat{Y}_k = a_k Y_5$ då $Y_5 = 3.0$ har observerats. Vi får normalekvationen

$$0 = C(Y_5, Y_k - \hat{Y}_k) = C(Y_5, Y_k - a_k Y_5) = r(k - 5) - a_k r(0)$$

som har lösningen $a_k = r(k - 5)/r(0)$.
Så

$$\begin{aligned} \hat{Y}_6 &= a_6 Y_5 = \frac{r(1)}{r(0)} Y_5 = \frac{1/8}{25/16} \cdot 3.0 = 0.24 \\ \hat{Y}_8 &= a_8 Y_5 = \frac{r(3)}{r(0)} Y_5 = \frac{1/4}{25/16} \cdot 3.0 = 0.48 \\ \hat{Y}_{10} &= a_{10} Y_5 = \frac{r(5)}{r(0)} Y_5 = \frac{0}{25/16} \cdot 3.0 = 0 \end{aligned}$$

- (c) Prediktera $\hat{Y}_6$ med $\hat{Y}_6 = a Y_5 + b Y_4$ då $Y_5 = 3.0$ och $Y_4 = 4.2$ har observerats. Vi får normalekvationerna

$$\begin{cases} 0 = C(Y_5, Y_6 - \hat{Y}_6) = C(Y_5, Y_6 - a Y_5 - b Y_4) = r(1) - a r(0) - b r(1) \\ 0 = C(Y_4, Y_6 - \hat{Y}_6) = C(Y_4, Y_6 - a Y_5 - b Y_4) = r(2) - a r(1) - b r(0). \end{cases}$$

Ekvationssystemet kan t.ex skrivas (och lösas) på matrisform

$$\begin{pmatrix} r(0) & r(1) \\ r(1) & r(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 25/16 & 1/8 \\ 1/8 & 25/16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 \\ -3/8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62/621 \\ -154/621 \end{pmatrix}$$

Så $\hat{Y}_6 = \frac{62}{621} \cdot 3.0 - \frac{154}{621} \cdot 4.2 \approx -0.742$.