

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, tabeller över statistiska fördelningar, Beta Mathematics Handbook och valfri räknedosa.

1. Tre olika Markovkedjor, A , B och C med tillståndsrum $E = \{0, 1, 2\}$ har följande övergångsmatriser

$$\mathbf{P}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestäm vilka av kedjorna A , B respektive C som

- (a) är irreducibla.
 - (b) är aperiodiska.
 - (c) har en asymptotisk fördelning. Bestäm även eventuella asymptotiska fördelningar. (5p)
2. Fumla-anstalten drabbas av rymningsförsök enligt en Poissonprocess med intensiteten fyra rymningsförsök per år. Sannolikheten att ett enskilt rymningsförsök från Fumla lyckas är (tyvärr) hela en chans på tjugio. Rymningsförsöken lyckas respektive misslyckas oberoende av varandra.

Beräkna sannolikheten att det under en halvårs period

- (a) inträffar exakt tre rymningsförsök.
 - (b) förekommer minst en lyckad rymning.
 - (c) inträffar exakt tre rymningsförsök givet att minst en rymning lyckas. (5p)
3. En tidsserie $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n = X_n - X_{n-1} + c_2 X_{n-2}, \quad (c_2 \neq 0)$$

där insignalen $\{X_n\}$ är vitt brus med okänd varians σ^2 .

- (a) Klassificera tidsserien $\{Y_n\}$ och avgör om processen är stabil eller ej.
 - (b) Beräkna konstanterna c_2 och σ^2 givet att $r_Y(0) = 2$ och $r_Y(1) = -1$.
 - (c) Prediktera Y_{17} då $Y_{15} = 2.1$ har observerats. (6p)
4. En komponent går sönder med intensiteten

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1 - (1 - t)^2, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Låt $R(t)$ vara komponentens överlevnadsfunktion och låt T vara dess livslängd.

- (a) Bestäm $R(t)$.
- (b) Bevisa att $E(T) > 1$. (6p)

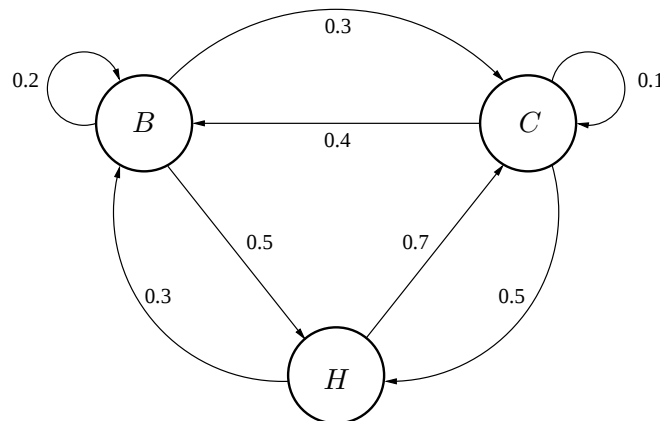
5. Praktikanten Darren sköter *Kramerica Industries* enda företagstelefon. Samtal anländer till Kramerica enligt en Poissonprocess med intensiteten 3 samtal per timme. Varje samtal pågår en exponentialfördelad tid med väntevärde 5 minuter. Om Kramerica får ett nytt samtal när Darren redan pratar i telefon hamnar det nya samtalet i kö (där alla snällt väntar tills de blivit betjänade). Utöver det pågående samtalet kan maximalt 2 samtal stå i kö. Om kön är full ignoreras eventuella nya samtal till Kramerica.
- Beräkna hur stor del av Darrens arbetstid som går åt att besvara telefonsamtal.
 - Darrens arbetsdag kan delas in i telefonperioder respektive icke-telefonperioder som avlöser varandra om vartannat. Bestäm väntevärdet för en så kallad telefonperiod. (6p)

6. En tidsserie $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n - \frac{1}{2}Y_{n-3} = X_n$$

där insignalen $\{X_n\}$ är vitt brus med varians $\sigma^2 = 3$.

- Klassificera tidsserien $\{Y_n\}$ och avgör om processen är stabil eller ej.
 - Beräkna kovariansfunktionen $r(k)$, till utsignalen $\{Y_n\}$, för alla k .
 - Prediktera Y_{17} då $Y_{16} = -1.3$ och $Y_{15} = 2.1$ har observerats. (6p)
7. Varje dag äter Elaine sin lunch på någon av de tre restaurangerna *Babu's Dream Cafe*, *China Panda* eller *Hop Sing's*. För variationens skull byter Elaine restaurang enligt nedanstående övergångsdiagram



där tillstånden ges av $E = \{\text{Babu's Dream Cafe}, \text{China Panda}, \text{Hop Sing's}\} = \{B, C, H\}$.

- Vilken restaurang får anses vara Elaines favorit, och varför?
- Idag äter Elaine på Hop Sing's. Beräkna det förväntade antalet dagar det tar innan Elaine
- äter på Hop Sing's igen.
 - gör sitt nästa besök på China Panda. (6p)