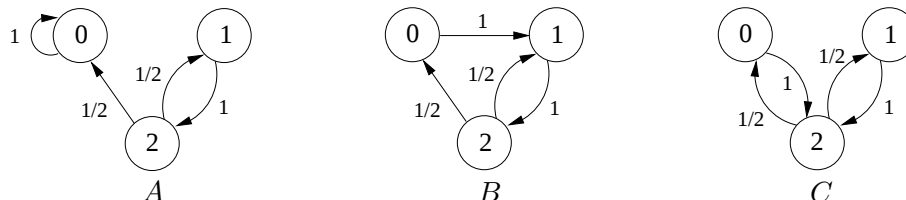


1. De givna Markovkedjorna har följande övergångsdiagram



(a) Kedja B och C är irreducibla ty alla tillstånd kommunicerar

$$B : 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \quad C : 0 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0.$$

Kedja A är inte irreducibel ty tillstånd 0 är absorberande.

(b) Kedja B är aperiodisk ty

$$B : \begin{aligned} \text{SGD}("0 \rightarrow 0") &= \text{SGD}(3, 5) = 1 \\ \text{SGD}("1 \rightarrow 1") &= \text{SGD}("2 \rightarrow 2") = \text{SGD}(2, 3) = 1 \end{aligned}$$

Kedja A och C är periodiska ty de har (flera) tillstånd med perioden 2, tex

$$\begin{aligned} A : \quad \text{SGD}("2 \rightarrow 2") &= \text{SGD}(2, 4, 6, \dots) = 2 \\ C : \quad \text{SGD}("2 \rightarrow 2") &= \text{SGD}(2, 4, 6, \dots) = 2. \end{aligned}$$

(c) Kedja A och B har asymptotiska fördelningar ty

A : oavsett initialfördelning kommer kedjan till slut absorberas i tillstånd 0.

Således är den asymptotiska fördelningen: $\pi_A = (1, 0, 0)$.

B : kedjan är ändlig, aperiodisk och irreducibel. Asymptotisk fördelning ges av

$$\begin{cases} \pi_B = \pi_B \cdot \mathbf{P}_B \\ \pi_{B0} + \pi_{B1} + \pi_{B2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi_B = (1/5, 2/5, 2/5).$$

En periodisk kedja kan bara ha en asymptotisk fördelning om *exakt* ett av kedjans tillstånd är absorberande och detta tillstånd kan nås från *samtliga* övriga tillstånd (som i kedja A). Den *irreducibla* kedjan C har m.a.o. ingen asymptotisk fördelning.

2. Definiera följande processer (tiden mäts i år):

$X(t)$ = antalet rymningsförsök under intervallet $(0, t]$

$Y(t)$ = antalet lyckade rymningar under intervallet $(0, t]$

$\{X(t)\}$ är en Poissonprocess med intensitet $\lambda_X = 4$, så $X(1/2) \in \text{Po}(4 \cdot 1/2) = \text{Po}(2)$.
 $\{Y(t)\}$ är en uttunnad (eller märkt) Poissonprocess med intensitet $\lambda_Y = 4 \cdot 1/20 = 1/5$, så $Y(1/2) \in \text{Po}(1/5 \cdot 1/2) = \text{Po}(1/10)$.

$$(a) \quad P(X(1/2) = 3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} \approx 0.180$$

(b) $P(Y(1/2) \geq 1) = 1 - P(Y(1/2) = 0) = 1 - e^{-1/10} \approx 0.0952$

(c) Skriv om uttrycket m.h.a. Bayes sats:

$$\begin{aligned} P(X(1/2) = 3 | Y(1/2) \geq 1) &= \frac{P(X(1/2) = 3)}{P(Y(1/2) \geq 1)} \cdot P(Y(1/2) \geq 1 | X(1/2) = 3) \\ &= \frac{P(X(1/2) = 3)}{P(Y(1/2) \geq 1)} \cdot (1 - P(Y(1/2) = 0 | X(1/2) = 3)) \end{aligned}$$

Antalet lyckade rymningar på 3 möjliga försök är en $\text{Bin}(3, 1/20)$ -fördelad stokastisk variabel, så

$$P(Y(1/2) = 0 | X(1/2) = 3) = \binom{3}{0} (1/20)^0 (1 - 1/20)^3 \approx 0.857.$$

Således är

$$P(X(1/2) = 3 | Y(1/2) \geq 1) \approx \frac{0.180}{0.0952} \cdot (1 - 0.857) \approx 0.270.$$

3. (a) Tidsserien är en så kallad MA(2)-process. MA-processer är alltid stabila.

(b) Vet att $c_0 = 1$, $c_1 = -1$, $r_Y(0) = 2$ och $r_Y(1) = -1$. Kovariansfunktionen blir

$$\begin{cases} r_Y(0) = \sigma^2(c_0^2 + c_1^2 + c_2^2) = \sigma^2(2 + c_2^2) = 2 \\ r_Y(1) = \sigma^2(c_0c_1 + c_1c_2) = \sigma^2(-1 - c_2) = -1 \\ r_Y(2) = \sigma^2(c_0c_2) = \sigma^2c_2 \\ r_Y(k) = 0, \quad |k| \geq 3. \end{cases}$$

Lös ut c_2 och σ^2 ur de två första ekvationerna. Tex genom att sätta

$$0 = r_Y(0) + 2r_Y(1) = \sigma^2(2 + c_2^2) + 2\sigma^2(-1 - c_2) = \sigma^2c_2(c_2 - 2).$$

Så $c_2 = 2$ och då blir $\sigma^2 = 2/(2 + c_2^2) = 1/3$.

(c) Prediktera Y_{17} med $\hat{Y}_{17} = a \cdot Y_{15}$. Normalekvationen ger:

$$\begin{aligned} 0 &= C(Y_{17} - a \cdot Y_{15}, Y_{15}) = r_Y(2) - a \cdot r_Y(0) \quad \Rightarrow \\ a &= \frac{r_Y(2)}{r_Y(0)} = \frac{\sigma^2c_2}{r_Y(0)} = \frac{(1/3) \cdot 2}{2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Så $\hat{Y}_{17} = (1/3) \cdot 2.1 = 0.7$.

4. (a) Låt $\Lambda(t) = \Lambda_1(t)$ för $0 \leq t < 1$ och $\Lambda(t) = \Lambda_2(t)$ för $1 \leq t < \infty$. Då blir

$$\begin{aligned} \Lambda_1(t) &= \int_0^t \lambda(s) ds = \int_0^t (1 - (1-s)^2) ds = \left[s + \frac{1}{3}(1-s)^3 \right]_0^t = t^2 - \frac{1}{3}t^3 \\ \Lambda_2(t) &= \int_0^t \lambda(s) ds = \Lambda_1(1) + \int_1^t 1 ds = (1^2 - \frac{1}{3} \cdot 1^3) + (t-1) = t - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

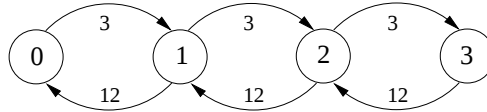
Överlevnadsfunktionen ges således av

$$R(t) = \begin{cases} \exp \left\{ -t^2 + \frac{1}{3}t^3 \right\}, & 0 \leq t < 1 \\ \exp \left\{ -t + \frac{1}{3} \right\}, & 1 \leq t < \infty. \end{cases}$$

- (b) Utnyttja att överlevnadsfunktionen alltid är icke-ökande för att uppskatta den svårare av de två integralerna nedan. Dvs, använd att $R(t) \geq R(1)$, för $0 \leq t < 1$.

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty R(t) dt = \int_0^1 \exp\left\{-t^2 + \frac{1}{3}t^3\right\} dt + \int_1^\infty \exp\left\{-t + \frac{1}{3}\right\} dt \\ &\geq (1-0) \cdot \exp\left\{-1^2 + \frac{1}{3} \cdot 1^3\right\} + \left[-\exp\left\{-t + \frac{1}{3}\right\}\right]_1^\infty \\ &= \exp\left\{-2/3\right\} + \exp\left\{-2/3\right\} = 2 \exp\left\{-2/3\right\} = 1.026... > 1 \end{aligned}$$

5. Antalet samtal i kö (samt under betjäning) är en födelse-dödsprocess med tillståndsrum $E = \{0, 1, 2, 3\}$. Övergångsdiagrammet ges av



då samtal ankommer/betjänas med intensitet $\lambda = 3$ resp. $\mu = 60/5 = 12$ samtal/timme.

- (a) Det finns en unik stationär och asymptotisk fördelning ty kedjan är ändlig och irreducibel. Den genererande matrisen ges av

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 12 & -15 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & 12 & -12 \end{pmatrix}$$

och den asymptotiska fördelningen av

$$\begin{cases} \pi \cdot \mathbf{Q} = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi = \frac{1}{85}(64, 16, 4, 1).$$

Betjäningsfaktorn blir $\rho = 1 - \pi_0 = 1 - 64/85 = 21/85 \approx 0.247$, vilket innebär att Darren spenderar 24.7% av sin arbetstid med att besvara telefonsamtal.

Anm: Uppgiften går även lösa med speciell teori för födelse-dödsprocesser.

- (b) Definiera följderna $\{B_i\}$ och $\{V_i\}$ enligt

B_i = tiden telefonperiod nr i pågår

V_i = tiden icke-telefonperiod nr i pågår.

Vi vet att $E(V) = E(V_i) = 1/3$ ty tiden Darren befinner sig i tillstånd 0 innan han får ett samtal är $\text{Exp}(3)$ -fördelad. En telefonperiod följd av en icke-telefonperiod bildar en förnyelsecykel, så

$$\frac{E(B)}{E(V) + E(B)} = \rho \Rightarrow E(B) = \frac{\rho}{1 - \rho} E(V) = \frac{21/85}{1 - 21/85} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{64}.$$

En telefonperiod pågår således i snitt $7/64 \approx 0.109$ timmar, eller i mer naturliga enheter; 6 min och 34 sekunder.

6. (a) Tidsserien är en så kallad AR(3)-process. Processens karakteristiska polynom är $A(z) = 1 - \frac{1}{2}z^3$. Polynomets nollställen ges av $z^3 = 2$ så alla rötter har beloppet $|z| = 2^{1/3} > 1$ vilket medför att processen är stabil.

(b) Kovariansfunktionen ges av Yule-Walker ekvationerna

$$\begin{cases} 3 = \sigma^2 = r(0) - \frac{1}{2}r(3) & (1) \\ 0 = r(1) - \frac{1}{2}r(-2) = r(1) - \frac{1}{2}r(2) & (2) \\ 0 = r(2) - \frac{1}{2}r(-1) = r(2) - \frac{1}{2}r(1) & (3) \\ 0 = r(3) - \frac{1}{2}r(0) & (4) \\ 0 = r(k) - \frac{1}{2}r(k-3), \quad k \geq 1. & (5) \end{cases}$$

Observera att ekvation (5), dvs $r(k) = (1/2) \cdot r(k-3)$ för $k \geq 1$, ger en periodisk rekursion (med period 3) för kovariansfunktionen. Har man tre startvärden, $r(0)$, $r(1)$ och $r(2)$, vet man således allt om kovariansfunktionen.

$$(1) + (4): \quad 3 = r(0) - \frac{1}{2}r(3) = r(0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}r(0) = \frac{3}{4}r(0) \Rightarrow r(0) = 4$$

$$(2) + (3): \quad r(1) = \frac{1}{2}r(2) \quad \text{och} \quad r(2) = \frac{1}{2}r(1) \Rightarrow r(1) = r(2) = 0$$

Så

$$r(k) = \begin{cases} 4 \cdot (1/2)^n, & k = 3n \text{ för } n \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{för alla övriga } k. \end{cases}$$

(c) Den bästa linjära prediktorn är $\hat{Y}_{17} = 0$ ty Y_{17} är okorrelerad med alla Y_k som inte uppfyller $k = 17 \pm 3n$ där $n \in \mathbb{N}$.

7. (a) Den restaurang som Elaine besöker oftast (i det långa loppet) får anses vara hennes favorit. Från diagrammet fås övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kedjan är ändlig och alla element i första kolonnen är positiva, så asymptotisk fördelning existerar. Den ges av

$$\begin{cases} \pi = \pi \cdot \mathbf{P} \\ \pi_B + \pi_C + \pi_H = 1 \end{cases} \Rightarrow \pi = \frac{1}{36}(11, 13, 12),$$

vilket rankar China Panda som favoritrestaurangen med knapp marginal.

(b) Låt T_{HH} = "första-återkomsttiden till H givet start i H ". Förväntad återkomsttid:

$$m_{HH} = E(T_{HH}) = 1/\pi_H = 1/(12/36) = 3 \text{ dagar}.$$

(c) Låt T_{ij} = "första-passagetiden till j givet start i i " för $i, j \in E$, då $i \neq j$. Använd förkortningen $m_{ij} = E(T_{ij})$. Betinga m.a.p första övergången:

$$m_{HC} = p_{HC} + p_{HB}(1 + m_{BC}) = 1 + 0.3 m_{BC}$$

$$m_{BC} = p_{BC} + p_{BB}(1 + m_{BC}) + p_{BH}(1 + m_{HC}) = 1 + 0.2 m_{BC} + 0.5 m_{HC}$$

Elimination av m_{BC} i det linjära ekvationssystemet ger $m_{HC} = 1.69$ dagar (och även $m_{BC} = 2.31$ dagar).