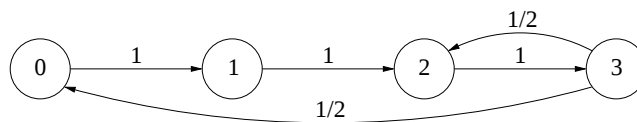


**Tillåtna hjälpmedel:** Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, tabeller över statistiska fördelningar, Beta Mathematics Handbook och valfri räknedosa.

1. Georges e-postadress utsätts för spam enligt en Poissonprocess med intensiteten 35 brev per vecka. George har dock ett spam-filter som med sannolikheten 0.9 hindrar ett enskilt spam-meddelande från att nå hans inkorg. Alla spam-filtreringar kan anses vara oberoende av varandra.

Beräkna sannolikheten att George under ett dygns tid

- (a) inte får någon spam i sin inkorg.
  - (b) inte får någon spam i sin inkorg givet att han utsätts för exakt 4 spamförsök.
  - (c) utsätts för exakt 4 spamförsök givet att han inte fått någon spam i sin inkorg. (5p)
2. En partikel befinner sig i något av tillstånden  $E = \{0, 1, 2, 3\}$  under ett dygns tid och byter sedan position (vid midnatt) enligt följande övergångsdiagram.



- (a) Bestäm om Markovkedjan för partikelns position är irreducibel och/eller aperiodisk.
- Om man bestämmer sig för att endast betrakta partikelns position vid jämna tidpunkter (dvs varannan dag) får man en helt ny Markovkedja.
- (b) Rita övergångsdiagrammet för denna nya Markovkedja.
  - (c) Bestäm om den nya Markovkedjan är irreducibel och/eller aperiodisk. Bestäm även om det finns en asymptotisk fördelning (och beräkna i så fall denna fördelning). (5p)
3. En stabil autoregressiv process  $\{Y_n\}$  definieras av

$$Y_n - cY_{n-1} = X_n$$

där insignalen  $\{X_n\}$  är vitt brus med okänd varians  $\sigma^2$ .

- (a) Att filtret är stabilt kan implicera vissa krav på konstanten  $c$ . Bestäm dessa krav.
  - (b) Bestäm  $c$  och  $\sigma^2$  då kovarianserna  $r_Y(0) = \frac{4}{3}$  och  $r_Y(\pm 1) = \frac{2}{3}$  är kända.
  - (c) Prediktera  $Y_2$  då  $Y_0 = -1.7$  har observerats. (6p)
4. Kramer och Newman har skickat ut fyra inbjudningar till en gemensam fest. Antag att varje inbjuden gäst besvarar sin inbjudan (oberoende av övriga gäster) efter en exponentiellt fördelad tid med väntevärde exakt en vecka.
- Beräkna den förväntade tid det tar innan Kramer och Newman erhållit svar från samtliga inbjudna gäster. (6p)

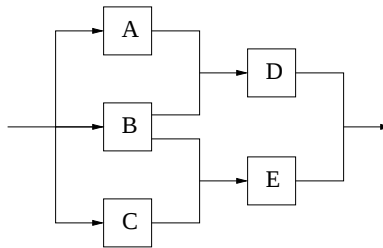
5. En Markovkedja med tillstånden  $E = \{1, 2, 3\}$  har övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Låt  $T_{ij}$  vara antalet steg som krävs för att nå tillstånd  $E_j$  vid start i tillstånd  $E_i$  och låt  $m_{ij} = \mathbb{E}(T_{ij})$ .

Bestäm alla

- (a) första-återkomsttider:  $m_{11}$ ,  $m_{22}$  och  $m_{33}$ .
  - (b) första-passagetider:  $m_{12}$ ,  $m_{13}$ ,  $m_{21}$ ,  $m_{23}$ ,  $m_{31}$  och  $m_{32}$ . (6p)
6. I systemet nedan har komponenterna oberoende livslängder, alla med felintensitet  $\lambda = 1$  fel per månad.



Bestäm systemets

- (a) funktionssannolikhet.
  - (b) förväntade livslängd. (6p)
7. En glidande medelvärdesprocess  $\{Y_n\}$  definieras av

$$Y_n = X_n + \frac{2}{3}X_{n-2} - \frac{1}{3}X_{n-3}$$

där insignalen  $\{X_n\}$  är vitt brus med varians  $\sigma^2 = 9$ .

- (a) Beräkna kovariansfunktionen  $r(k)$  till utsignalen  $\{Y_n\}$ , för alla  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (b) Prediktera  $Y_{17}$  då  $Y_{16} = 1.8$  och  $Y_{15} = -3.0$  har observerats. (6p)

Svar till tentan blir tillgängliga på kurshemsidan under onsdagen den 9/1.

<http://www.math.uu.se/~niclasp/stokmod07/stokmod07.html>

