

Tillåtna hjälpmedel: Formelsamling för kursen Stokastisk modellering STS3, tabeller över statistiska fördelningar, Beta Mathematics Handbook och valfri räknedosa.

1. $\{X(t)\}$ och $\{Y(t)\}$ är två oberoende och svagt stationära processer sådana att;

process	väntevärdesfunktion	kovariansfunktion
$X(t)$	$m_X(t) = 2$	$r_X(s, s+t) = t + 2$
$Y(t)$	$m_Y(t) = 1$	$r_Y(s, s+t) = (t+1)^2$.

Låt $Z(t) = 2X(t) - Y(t)$.

- (a) Bestäm väntevärdesfunktionen $m_Z(t)$ och kovariansfunktionen $r_Z(s, s+t)$.
(b) Är $\{Z(t)\}$ en svagt stationär process? Motivera. (5p)
2. Räddningskåren i Jamstad drabbas av utryckningar mest till följd av bränder, men då och då även av att katter klättrat upp i höga trän. Utryckningarna kan antas ske enligt oberoende Poissonprocesser med intensiteterna tre brandutryckningar per vecka respektive en kattutryckning per vecka.
Bestäm sannolikheten att räddningskåren
(a) får exakt fyra utryckningar första veckan.
(b) fick minst en kattutryckning givet att det var totalt fyra utryckningar första veckan.
(c) får åtminstone tre brandutryckningar före de får sin första kattutryckning. (5p)
3. På en glassfabrik finns det en stor vaniljglassmaskin som går sönder med intensiteten 0.2 fel per timme. För att laga maskinen behöver reparatören en exponentialfördelad tid med väntevärde 30 minuter. Efter lagning måste maskinen gå på tomgång för att återfå rätt temperatur innan den kan återtas i drift. Tomgångs-körningen är oberoende av reparationstiden och tar ytterligare en exponentialfördelad tid med väntevärde 10 minuter.
Bestäm maskinens driftstillgänglighet då systemet är i jämvikt
(a) genom att använda Markovteori.
(b) genom att använda Förnyelse teori. (6p)

Vilken av metoderna anser du vara den bästa för att lösa denna typ av problem?

4. En stationär process $\{Y_n\}$ definieras av

$$Y_n = 3X_n - 2X_{n-1} + X_{n-2},$$

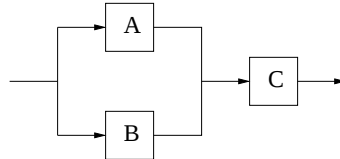
där insignalen $\{X_n\}$ är vitt brus med varians $\sigma^2 = 1/4$.

- (a) Bestäm kovariansfunktionen $r(k)$ till utsignalen $\{Y_n\}$, för alla $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Prediktera Y_7 då $Y_6 = -1.2$ och $Y_5 = 3.0$ har observerats. (6p)

5. En apa placeras med likformig sannolikhet ut på en av de nio rutorna i ett 3×3 rutnät. Den förvirrade apan utför sedan en slumpvandring i rutnätet genom att då och då hoppa till någon av de angränsande rutorna inom rutnätet. Två rutor sägs vara angränsande om de delar exakt en sida. Diagonala hopp och hopp till samma ruta är således inte tillåtna. Apan väljer vilken ruta han ska hoppa till med likformig sannolikhet bland de tillåtna alternativen.

Beräkna sannolikheten att apan befinner sig i mittenrutan efter exakt tre gjorda hopp. (6p)

6. Komponenterna i systemet nedan har oberoende livslängder och deras felintensiteter ges av $\lambda_A = 3\lambda$ respektive $\lambda_B = 2\lambda$ och $\lambda_C = \lambda$ för någon konstant λ .



- (a) Bestäm systemets funktionssannolikhet.
(b) Bestäm konstanten λ så att systemets förväntade livslängd blir 1 tidsenhet. (6p)
7. En Markovprocess med fyra tillstånd $E = \{0, 1, 2, 3\}$ har intensitetsmatris

$$Q = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och startar i tillstånd 0.

Beräkna den förväntade tiden tills processen absorberas i tillstånd 3. (6p)

Svar till tentan blir tillgängliga på kurshemsidan under tisdagen den 26/8.

<http://www.math.uu.se/~niclasp/stokmod07/stokmod07.html>

