UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Erik Palmgren

Kompletterande material
Algebra DV2
ht-2000

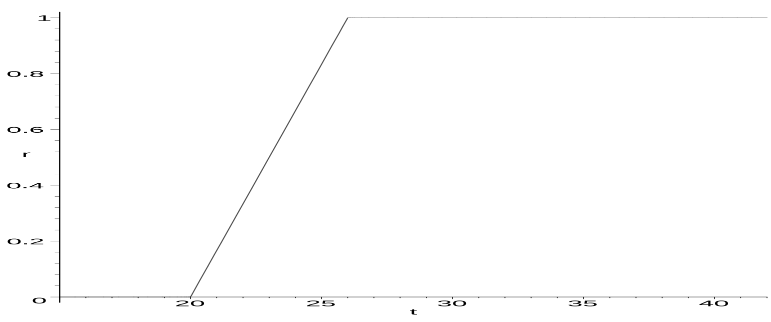
1 Suddig logik och gitter

Suddig logik (engelska: *fuzzy logic*) är en utvidgning av vanlig boolesk logik och används för att beskriva grader av sanning. Begreppet introducerades av L.A. Zadeh (1965) med tanke på lingvistiska tillämpningar, för att ge adjektiv som *kall*, *snabb*, *grön*, *sur* etc. en matematiskt exakt mening. Suddig logik är numera vida använd i automatisk styrning av olika processer — till och med i hushållsapparater som tvättmaskiner — eftersom den ger en användbar metod för att formulera och implementera tumregler. Vi skall här endast ge en kort inledning till ämnet för att illustrera teorin för gitter och booleska algebror. Den är avsedd att läsas som ett komplement till (Truss 1999) eller liknande litteratur. För en utförlig introduktion med tillämpningar, se Ross (1995). Det finns även tidskrifter ägnade åt suddig logik och dess användning, t.ex. *Fuzzy Sets and Systems.*

I normalt språkbruk förekommer ofta påståenden såsom, t *är hög rumstemperatur,* som ej så väl kan beskrivas med bestämda sanningsvärden. (Följande är subjektiva data, som många nog kan hålla med om.) Om $t = 20°\mathrm{C}$ är påståendet inte sant; om $t = 26°\mathrm{C}$, så är påståendet sant. Vad är sanningsvärdet då $t = 23°\mathrm{C}$? Obestämt eller 50% sant? Zadehs idé var just att låta sådana påståenden anta sanningsvärden mellan 0% och 100%, dvs. i intervallet $[0, 1]$. Man skulle, till exempel, kunna beskriva hur påståendets sanningsgrad varierar med temperaturen t, med hjälp av en funktion $r : [15, 42] \to [0, 1]$, definierad av

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{om } 15 \leq t < 20 \\ (t-20)/6 & \text{om } 20 \leq t < 26 \\ 1 & \text{om } 26 \leq t \leq 42 \end{cases}$$

Funktionen r har följande graf:



(Genom att använda operationer för minimum och maximum kan funktionen definieras mer kortfattat: $r(t) = \min(1, \max(0, (t-20)/6))$.)

kurser/ADV2/fuzzy.tex, version 4/8-00

Vi betraktar r som en *suddig mängd* där $r(t)$ tolkas som i vilken grad t är ett element i r. Då $r(t) = 1$ är t definitivt i r, och då $r(t) = 0$ är t definitivt utanför r. Hur kombinerar man gamla suddiga mängder till nya suddiga mängder? T.ex. om vi vill bilda en suddig mängd k av de t sådana att t är hög rumstemperatur men inte feber. Den suddiga mängden $s : [15, 42] \to [0, 1]$ av febertemperaturer kan tänkas ges av $s(t) = \min(1, \max(0, (t-37)/0.8))$. (Rita in dess graf ovan!) Om r och s nu vore vanliga mängder skulle vi kunna beskriva k som $r \cap \overline{s}$, dvs snittet av r med komplementet till s. Vi måste definiera nya mängdoperationer för de suddiga mängderna.

Definition. Låt A vara en mängd. En *suddig delmängd* av A är en funktion $f : A \to [0, 1]$. Beteckna med $F(A)$ mängden av alla suddiga delmängder av A (dvs. mängden av alla funktioner $A \to [0, 1]$). Definiera *komplementet* $\overline{f}$ till $f \in F(A)$ som en ny funktion $\overline{f} : A \to [0, 1]$ genom

$$\overline{f}(t) = 1 - f(t) \qquad (t \in A).$$

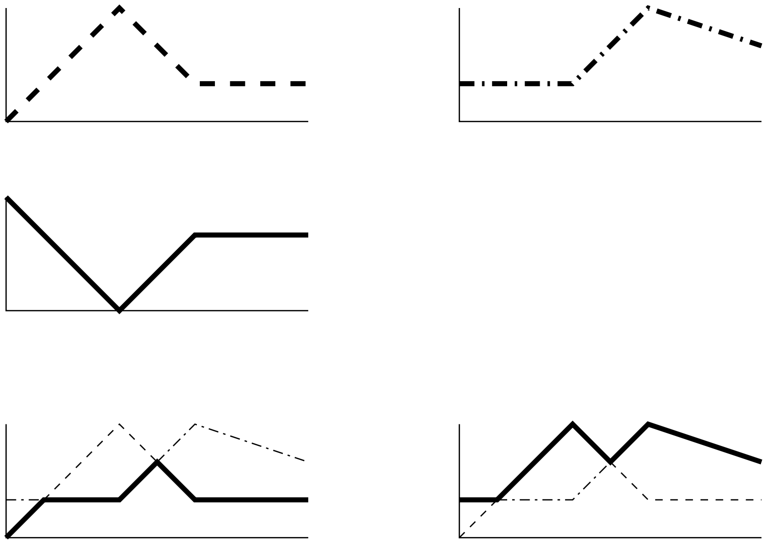
Låt $f, g \in F(A)$. *Snittet* $f \wedge g$ av f och g ges av

$$(f \wedge g)(t) = \min(f(t), g(t)) \qquad (t \in A).$$

Unionen $f \vee g$ av f och g ges av

$$(f \vee g)(t) = \max(f(t), g(t)) \qquad (t \in A). \qquad \blacksquare$$

Dessa funktionsgrafer illustrerar operationerna ovan. Från vänster till höger, uppifrån och ner har vi f, g, och med heldragna kurvor, $\overline{f}$, $f \wedge g$ och $f \vee g$:

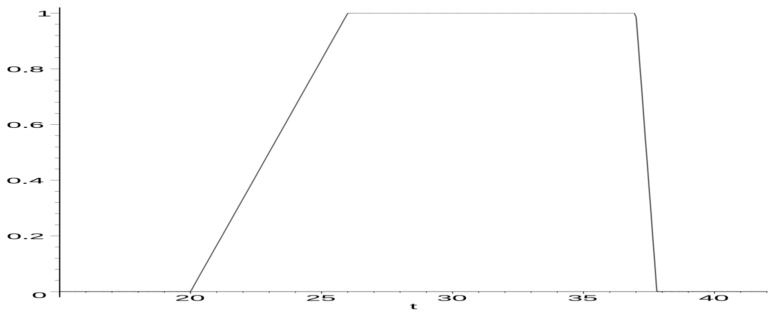


Definitionen av komplementet kan förklaras genom att om $f(t)$ är graden av sanning så är $1 - f(t)$ graden av falskhet. För att förklara $\wedge$ och $\vee$ inför vi begreppet *suddig inklusion* ($\leq$): för $f, g \in F(A)$ definiera

$$f \leq g \iff_{\text{def}} (\forall t \in A) f(t) \leq g(t).$$

Detta betyder att varje element t är med i g i minst lika hög grad som det är med i f. Om vi kan rita grafer för f och g, innebär detta att grafen för g ligger över, eller (delvis) på, grafen för f. Exempelvis har vi $s \le r$ för de tidigare diskuterade mängderna. Vi skall senare se att $f \wedge g$ är den största suddiga mängden som är suddigt inkluderad i både f och g, dvs. den är infimum av båda dessa mängder. På motsvarande sätt är $f \vee g$ den minsta suddiga mängden som suddigt inkluderar både f och g, dvs. den är supremum av f och g. Detta betyder att $F(A)$ bildar ett *gitter* (se Följdsats 2 nedan).

Exempel. Vi kan nu bilda den eftersträvade suddiga mängden $k = r \wedge \overline{s}$, vars graf ser ut så här



Om S är en (vanlig) delmängd av A, så beskrivs den av sin *karakteristiska funktion*

$$\chi_S(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } t \in S, \\ 0 & \text{om } t \notin S. \end{cases}$$

Vi kan således betrakta S som en suddig mängd $\chi_S \in F(A)$. En suddig mängd av denna form kallas *skarp* (engelska: *crisp*). Man ser nu att definitionerna av mängdoperationerna på $F(A)$ var väl valda, eftersom

$$\begin{aligned} \chi_{\overline{S}} &= \overline{\chi_S}, \\ \chi_{S\cap T} &= \chi_S \wedge \chi_T, \\ \chi_{S\cup T} &= \chi_S \vee \chi_T. \end{aligned}$$

Detta är lätt visa. Vi illustrerar med den andra likheten. Om $\chi_{S\cap T}(t) = 1$, så $t \in S \cap T$. Då gäller $\chi_S(t) = 1$ och $\chi_T(t) = 1$ och följaktligten $(\chi_S \wedge \chi_T)(t) = \min(\chi_S(t), \chi_T(t)) = 1$. Men om $\chi_{S\cap T}(t) = 0$, så $\chi_S(t) = 0$ eller $\chi_T(t) = 0$, och därmed $(\chi_S \wedge \chi_T)(t) = \min(\chi_S(t), \chi_T(t)) = 0$.

Exempel. Den underliggande mängden A till $F(A)$ kan vara i princip vad som helst. På en färgskärm består varje pixel av ett rött, ett grönt och ett blått element vars respektive ljusstyrkor $(r, g, b) \in [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ bestämmer en färg. $(0, 0, 0)$, $(0.5, 0.5, 0.5)$ och $(1, 0.75, 1)$ är exempelvis svart, grått respektive skärt. (Testa detta med något ritprogram som medger blandning av färger enligt RGB-principen.) Det finns förvisso precisa recept på vilken blandning av grundfärgerna som ger en viss färg, t.ex. ultramarin. Man kan dock var intresserad att beskriva något som blåaktigt och då kan suddiga mängder vara lämpliga. En (vag) färg blir då helt enkelt en suddig mängd $b \in F([0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1])$. (Övning: försök ge ett uttryck för graden av "blåaktighet" med hjälp av aritmetiska operationer, minimum och maximum.)

Vi påminner om definitionen av en boolesk algebra (Truss 1999).

Definition. En *boolesk algebra* är en mängd B med två binära operationer $\wedge$ (konjunktion, snitt, infimum) och $\vee$ (disjunktion, union, supremum) samt en unär operation $\bar{\cdot}$ (negation, komplement) och särskilda konstanter $\mathbf{0}$ och $\mathbf{1}$, som uppfyller följande axiom:

(B1) $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$ (kommutativitet)

(B2) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ (associativitet)

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

(B3) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (distributivitet)

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(B4) $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$ (idempotens)

(B5) $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$ (de Morgans lagar)

$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$

(B6) $\overline{\overline{a}} = a$ (dubbla negationens lag)

(B7) $\mathbf{0} \wedge a = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \vee a = a$ (0-lagar)

(B8) $\mathbf{1} \wedge a = a$, $\mathbf{1} \vee a = \mathbf{1}$ (1-lagar)

(B9) $a \wedge \overline{a} = \mathbf{0}$, $a \vee \overline{a} = \mathbf{1}$ (komplementlagen). ∎

Exempel. Som bekant bildar mängden $\wp(A)$ av alla delmängder av en mängd A en boolesk algebra med snitt ($\cap$), union ($\cup$) och komplement ($\bar{\cdot}$) som operationer, och där $\mathbf{0} = \emptyset$ och $\mathbf{1} = A$. (Se Truss 1999.)

I algebran $F(A)$ av suddiga mängder betecknar vi $\chi_\emptyset$ med $\mathbf{0}$ och χ_A med $\mathbf{1}$. Denna algebra är *nästan* en boolesk algebra som nedanstående sats visar.

Sats 1 *Algebran av suddiga mängder* $(F(A), \wedge, \vee, \bar{\cdot}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *uppfyller axiomen (B1) – (B8) samt de s.k. absorbtionslikheterna:*

$$\text{(B10)} \qquad a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a.$$

Bevis. Bevisen för likheterna är rutinmässiga verifikationer. Vi illustrerar genom att visa den distrubitiva lagen

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

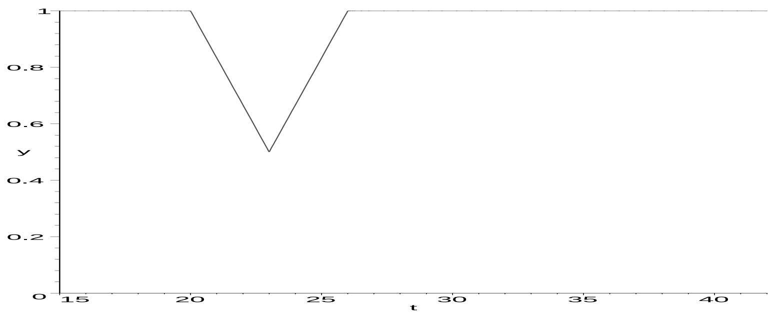
Betrakta ett godtyckligt $t \in A$. Vi behöver visa att

$$\min(a(t), \max(b(t), c(t))) = \max(\min(a(t), b(t)), \min(a(t), c(t))). \tag{1}$$

Detta görs enklast genom att systematiskt betrakta alla fyra möjligheter $a(t) \leq / > b(t)$ och $a(t) \leq / > c(t)$. (i) Om $a(t) \leq b(t)$ och $a(t) \leq c(t)$, så är båda leden i (1) $a(t)$. (ii) Om $a(t) > b(t)$ och $a(t) > c(t)$, så är båda leden $\max(b(t), c(t))$. (iii) Om $a(t) \leq b(t)$ och $a(t) > c(t)$, så är $b(t) > c(t)$ och därmed är det klart båda leden är $a(t)$. (iv) I fallet $a(t) > b(t)$ och $a(t) \leq c(t)$ är båda leden $a(t)$. ∎

Komplementlagen (B9) gäller dock i allmänhet inte, så $F(A)$ är i allmänhet *inte* en boolesk algebra.

Exempel. Grafen för $r \vee \overline{r}$, där r är definierad på sidan 1, ser ut så här



Det är tydligt att $r \vee \overline{r} \neq \mathbf{1}$. Genom att rita grafen för $r \wedge \overline{r}$ ser man att även $r \wedge \overline{r} \neq \mathbf{0}$. Komplementlagen gäller alltså inte.

Kom ihåg att $(L, \vee, \wedge)$ är ett *gitter* om det uppfyller (B1), (B2), (B4) och (B10). Det är *distributivt* om det dessutom uppfyller (B3). (Se Truss 1999.)

Följdsats 2 $(F(A), \wedge, \vee)$ *är ett distributivt gitter.*

Bevis. Enligt Sats 1 och definitionerna följer detta omedelbart. ∎

Sats 3 *För suddiga mängder* $a, b \in F(A)$ *gäller*

$$a \leq b \Leftrightarrow a = a \wedge b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Bevis. Övning. ∎

Det följer nu att $\leq$ är den ordning som definieras av $\wedge$ (eller $\vee$), så $\wedge$ är verkligen supremum-operationen med avseende på $\leq$, liksom $\vee$ är infimum-operationen. (Det är även enkelt att verifiera detta direkt.) Man kan vidare visa att $F(A)$ är ett fullständigt gitter, och har därmed (trivialt) ett exempel på en fullständig partiell ordning (CPO).

Anmärkning. Det skall påpekas att suddig logik har kritiserats för att graderna av sanning i allmänhet inte har någon klar tolkning. De kan exempelvis inte tolkas som sannolikheter, såsom är fallet med en "konkurrent" till suddig logik, *Bayesk logik*. Likafullt har suddig logik visat sig mycket framgångsrik för att i många praktiska sammanhang fånga oprecis eller osäker kunskap.

2 Intuitionistisk logik*

För att bevisa den andra komplementlagen (B9) för algebran av mängder $\wp(S)$ använder man den logiska *lagen om det uteslutna tredje*

$$A \vee \neg A.$$

Omvänt, komplementlagen används för att ge booleskvärd tolkning av det uteslutna tredje. En typ av logik där lagen om uteslutna tredje inte är allmängiltig är s.k. *intuitionistisk logik* (se van Dalen 1997). Precis som vanlig logik svarar mot booleska algebror, svarar intuitionistisk logik mot s.k. *Heyting-algebror.* En *Heyting-algebra* är ett distributivt gitter $(H, \wedge, \vee)$ med en extra binär operation $\rightsquigarrow$ (för intuitionistisk implikation) så att följande ekvivalens gäller för alla element $a, b, c \in H$:

$$c \leq (a \rightsquigarrow b) \Longleftrightarrow c \wedge a \leq b. \tag{2}$$

För två suddiga mängder $a, b \in F(A)$ definiera den suddiga mängden $(a \rightsquigarrow b)$ genom

$$(a \rightsquigarrow b)(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } a(t) \leq b(t) \\ b(t) & \text{om } a(t) > b(t) \end{cases}$$

Följdsats 4 *$(F(A), \wedge, \vee, \rightsquigarrow)$ är en Heyting-algebra.*

Bevis. Enligt Följdsats 2 vet vi att $(F(A), \wedge, \vee)$ är ett distributivt gitter. Vi behöver alltså bara verfiera ekvivalensen (2). Låt $a, b, c \in F(A)$. Då är $c \leq (a \rightsquigarrow b)$ ekvivalent med att $c(t) \leq (a \rightsquigarrow b)(t)$ för alla $t \in A$. Eftersom $c(t) \leq 1$ för varje t, är detta i sin tur ekvivalent med att $c(t) \leq b(t)$ eller $a(t) \leq b(t)$ för alla t. Men $(c \wedge a)(t) = \min(c(t), a(t)) \leq b(t)$ är det samma som att $c(t) \leq b(t)$ eller $a(t) \leq b(t)$. Därav följer ekvivalensen. ∎

Det vanliga sättet att definiera implikation i en boolesk algebra är att sätta

$$(a \rightarrow b) =_{\text{def}} \overline{a} \vee b.$$

Man kan enkelt konstruera exempel på suddiga mängder a och b där $(a \rightarrow b) \neq (a \rightsquigarrow b)$. Emellertid överenstämmer de båda implikationsoperationerna för skarpa mängder a och b (se övningar nedan).

Litteraturförteckning

Lotfi A. Zadeh: Fuzzy Sets. *Information and Control* 8(1965), 338 – 253.
John Truss: *Discrete Mathematics for Computer Scientists.* Addison-Wesley 1999.
A. De Luca, S. Termini: Algebraic Properties of Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 40(1972), 373 – 386.
D. van Dalen: *Logic and Structure,* 3:e upplagan. Springer 1997.
T.J. Ross: *Fuzzy Logic with Engineering Applications.* McGraw-Hill 1995.
H.J. Zimmermann: *Fuzzy Set Theory and its Applications.* Kluwer Academic Publishers 1996.

Övningar

1. Kontrollera att de båda definitionerna av $r(t)$ på sidan 1 överensstämmer.
2. Fullborda beviset av Sats 1 och märk särskilt lagarna (B5) och (B10).
3. Bevisa Sats 3.
4. Visa att $F(A)$ inte är en boolesk algebra för någon icketom mängd A. (Kuggfråga: vad gäller om $A = \emptyset$?)

5. * En reell-värd funktion $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ kallas *polygonfunktion* om dess graf kan ritas genom att förbinda ett antal punkter i planet med räta linjer. En mer formell definition: det finns ett antal punkter $p_1 = (x_1, y_1), \ldots, p_n = (x_n, y_n)$ i planet där $u = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = v$, och f ges av

$$f(t) = y_i + (y_{i+1} - y_i)\frac{t - x_i}{x_{i+1} - x_i} \qquad (x_i \le t \le x_{i+1}).$$

   (a) En *linjär funktion* $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ är en funktion som ges av $f(t) = at+b$ ($t \in [u, v]$). Visa att varje *linjär funktion* är en polygonfunktion.

   (b) Visa att om g är en polygonfunktion så är $\overline{g}$ en polygonfunktion.

   (c)* Visa att om g och h är polygonfunktioner så är $g \wedge h$ och $g \vee h$ polygonfunktioner.

   (d) Låt $L[u, v]$ vara mängden av polygonfunktioner $g : [u, v] \to [0, 1]$. Vi har alltså $L[u, v] \subseteq F([u, v])$. Visa att $(L, \wedge, \vee, \bar{\cdot}, 0, 1)$ uppfyller axiomen (B1)–(B8) samt absorbtionslikheterna. [Ledning: detta följer enkelt från (c) och sats 1.]

   (e) Visa att de enda skarpa mängderna i $L[u, v]$ är $\mathbf{0}$ och $\mathbf{1}$.

6. Låt $P \subseteq F([u, v])$ vara den minsta mängd som innehåller alla linjära funktioner $f : [u, v] \to \mathbb{R}$, och som dessutom uppfyller:

$$f, g \in P \Longrightarrow f \wedge g, f \vee g \in P.$$

   P består alltså av alla funktioner som kan skrivas som en kombination av linjära funktioner med hjälp av $\wedge$ och $\vee$.

   (a) Använd resultaten från föregående övning för att konstatera att varje element i P är en polygonfunktion.

   (b)* Visa att varje polygonfunktion $f : [u, v] \to \mathbb{R}$ tillhör P. (Ledning: gör induktion på antalet hörnpunkter i beskrivningen av f.)

   Alltså utgör polygonfunktionerna det minsta delgitter till $F([u, v])$ som innehåller alla linjära funktioner.

7. * I denna övning jämförs intuitionistisk implikation och vanlig implikation i $F(A)$.

   (a) Visa att för skarpa $a, b \in F(A)$ gäller $(a \rightsquigarrow b) = (a \to b)$.

   (b) Visa att det finns $a, b \in F([0, 1])$ så att både $(a \rightsquigarrow b) \not\leq (a \to b)$ och $(a \to b) \not\leq (a \rightsquigarrow b)$.

8. * Visa är $F(A)$ ett fullständigt gitter. (Ledning: Man behöver använda egenskapen att varje uppåt begränsad icketom mängd av reella tal har ett supremum.)

9. Betrakta de suddiga mängderna $F([0, 1])$. Nedan definieras operationer $f_1, f_2, f_3 : F([0, 1]) \to F([0, 1])$. Vilka av dessa är monotona? Bestäm samtliga fixpunkter till operationerna (ifall de har några).

   (a) $f_1(x) = \overline{x}$.

   (b) $f_2(x) = x \vee a$, där $a(t) = t$ $(0 \le t \le 1)$.

   (c) $f_3(x) = x \rightsquigarrow a$, där $a(t) = t$ $(0 \le t \le 1)$.