Lösning uppgift 1.8.9

Följden c_n definieras genom
$c_1 = 0, \quad c_n = 4c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n,\ n \geq 1,$
där $\lfloor x \rfloor$ = största heltalet som är mindre än x.
Visa att $c_n \leq 4(n-1)^2$ för alla $n \geq 1$.

Använder starka induktionsprincipen.
Grundsteg: $(n = 1)$
VL$= 0$, HL$=4(1-1)^2 = 1$

Induktionssteg:
Antag sant för $1 \leq k < n$, visar sant för n.
Vet att

$$VL_n = c_n = 4c_{\lfloor n/2 \rfloor} + n \leq 4 \cdot 4(\lfloor n/2 \rfloor - 1)^2 + n,$$

där olikheten följer av induktionsantagandet (olikheten gäller för $k = \lfloor n/2 \rfloor$).
Men då $n \geq 2$ har vi $0 \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1 \leq (n/2 - 1)$ (($\lfloor x \rfloor \leq x$ gäller ju alltid)) så vi får

$$\begin{aligned} VL_n &\leq 4 \cdot 4(\lfloor n/2 \rfloor - 1)^2 + n \leq 4 \cdot 4(n/2 - 1)^2 + n \\ &= 4(2(n/2-1))^2 + n = 4(n-2)^2 + n \leq 4(n-1)^2 = HL_n. \end{aligned}$$

Den sista olikheten gäller eftersom

$$4(n-2)^2 + n - 4(n-1)^2 = 12 - 7n \leq 0, \text{ för } n \geq 2.$$