

Föreläsning 1

Utsagor (Propositioner)

sammansatta utsagor

sanningstabeller

logisk ekvivalens

predikat (öppna utsagor)

kvantifierare

Section 1.1-1.3 i kursboken

Definition En *utsaga* (proposition) är ett påstående som antingen är sant eller falskt

Exempel:

'Det finns oändligt många primtal'

'Om $x = 3$ så är $x^2 = 9$.'

' $3 > 5$ '

Vi använder bokstäver som p, q, r för att beteckna utsagor och skriver exempelvis

p : '4 är ett primtal'

för att definiera p som utsagan '4 är ett primtal'.

En utsaga har *sanningsvärde* T (True) om den är sann

och sanningsvärde F (False) om den är falsk.

Med hjälp av *logiska operatorer* bildar man *sammansatta utsagor*.

De logiska operatorerna definieras av deras sanningstabell

Negation - 'inte'

Negationen av p skrivs $\neg p$

Sanningstabell

p	$\neg p$
T	F
F	T

Observera att vi nu arbetar abstrakt med utsagor, vi låter en bokstav (p, q, r etc) beteckna en utsaga vilken som helst, utan att vi har bestämt något sanningsvärde., jfr hur man arbetar med bokstäver för tal i algebra, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \dots$

Konjunktion - 'och'Konjunktionen av p och q skrivs $p \wedge q$

Sanningstabell

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

Disjunktion - 'eller'Disjunktionen av p och q skrivs $p \vee q$

Sanningstabell

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

OBS! Inte samma sak som 'antingen eller'

Implikation - 'om ... så ...'' p implicerar q ' skrivs $p \rightarrow q$

Sanningstabell

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Om $p \rightarrow q$ är sann kallas p ett *tillräckligt villkor* för q , och q ett *nödvändigt villkor* för p .

OBS! Om p är falsk är $p \rightarrow q$ oavsett sanningsvärde på q .
Exempelvis

p : $1 > 2$

q : $4 < 8$

$p \rightarrow q$ är sann, $q \rightarrow p$ är falsk.

OBS! $p \rightarrow q$ och $q \rightarrow p$ är inte samma sak.

$q \rightarrow p$ kallas omvändningen av $p \rightarrow q$

Ekvivalens - 'om och endast om'

' p och q är ekvivalenta' skrivs $p \leftrightarrow q$

Sanningstabell

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$p \leftrightarrow q$ är samma sak som $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Om en sammansatt utsaga skapas mha flera logiska operationer så gäller följande

Prioritetsregler:

(1) Parenteser

(2) $\neg$

(3) $\wedge$

(4) $\vee$

(5) $\rightarrow$ och $\leftrightarrow$

Jämför / och $\cdot$ beräknas före $+$ och $-$.

Exempel:

$\neg p \rightarrow q \vee r$ betyder $(\neg p) \rightarrow (q \vee r)$

Utsagan

$\neg((p \rightarrow q) \vee r)$

måste skrivas med parenteser.

Sanningstabell för $\neg p \rightarrow q \vee r$

p	q	r	$\neq p$	$q \vee r$	$\neg p \rightarrow q \vee r$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F

Sanningstabell för $\neg((p \rightarrow q) \vee r)$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \vee r$	$\neg((p \rightarrow q) \vee r)$
T	T	T	T	T	F
T	T	F	T	T	F
T	F	T	F	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	F
F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F

Definition Två utsagor P och Q sammansatta av utsagorna $p_1, \dots, p_n$ är *logiskt ekvivalenta* om oavsett sanningsvärde på $p_1, \dots, p_n$ antingen både P och Q är sanna eller både P och Q är falska. Vi skriver

$$P \equiv Q$$

Exempel: De tidigare sanningstabellerna visar att $\neg p \rightarrow q \vee r$ och $\neg((p \rightarrow q) \vee r)$ inte är logiskt ekvivalenta.

Exempel: $\neg\neg p \equiv p$ (Dubbel negationslagen)

De Morgan's lagar

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q, \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Bevis för den andra

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	
T	T	T	F	
T	F	F	T	
F	T	F	T	
F	F	F	T	
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Kontrapositiva lagen

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$\neg q \rightarrow \neg p$ kallas *kontrapositiva satsen* till $p \rightarrow q$.

Bevis

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

Implikationslagen

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Bevis

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(Viktigt) Exempel: $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$

Bevis: $\neg(p \rightarrow q) \equiv \neg(\neg p \vee q)$ enligt implikationslagen.

$\neg(\neg p \vee q) \equiv (\neg\neg p) \wedge \neg q$ enligt de Morgan's lag.

$(\neg\neg p) \wedge \neg q \equiv p \wedge \neg q$ enligt dubbel negation.

Om man vill ta reda på sanningsvärdet för en utsaga kan man lika gärna visa sanningsvärdet för en logiskt ekvivalent utsaga. Kanske är den enklare att visa?

Definition

Ett påstående $P(x)$ som innehåller en variabel x från en mängd D kallas ett *predikat* (eller satsfunktion, eller öppen utsaga) om $P(x)$ är en utsaga för varje x i mängden D .

D kallas domänen för P .

Exempel:

$P(x)$: $x^2 > 0$

$P(1)$ är sant men $P(0)$ är inte sant.

Ekvationer är öppna utsagor

Med hjälp av *kvantifierare* kan man göra utsagor av öppna utsagor

Universalkvantifieraren - för varje ... - skrivs $\forall$

$$\forall x P(x)$$

är sann om $P(x)$ är sann för varje x , falsk om det finns x för vilket $P(x)$ är falsk.

Exempel:

$\forall x \in \mathbb{R} (x^2 > 0)$ är falsk

$x = 0$ kallas för ett *motexempel*

$\forall x \in \mathbb{R} (x + 1 > x)$ är sann

För att visa att $\forall x P(x)$ är sann måste man visa att $P(x)$ är sann för varje x .

Börja med ett godtyckligt x visar ... Kan inte bara visa sant för ett enstaka x .

För att visa att $\forall x P(x)$ är falsk räcker det att hitta ett motexempel x för vilket $P(x)$ är falskt.

Existenskvantifieraren - det finns... - skrivs $\exists$

$$\exists x P(x)$$

är sann om det finns minst ett x så att $P(x)$ är sann, falsk om $P(x)$ är falskt för varje x .

Exempel:

$\exists x > 0 (\sqrt{x} < 0)$ är falsk

$\exists x (x^2 < x)$ är sann
för exempelvis $x = 1/2$ gäller ju $x^2 < x$.
ekvation $f(x) = 0$
 $\exists x f(x) = 0$
är sann om ekvationen har en lösning.

För att visa att $\exists x P(x)$ är sann räcker det att hitta ett x för vilket $P(x)$ gäller
För att visa att $\exists x P(x)$ är falsk måste man visa att $P(x)$ är falsk för varje x
Börja med ett godtyckligt x visar ... $P(x)$ inte sant.
Kan inte bara visa sant för ett enstaka x

Generaliserade de Morgan's lagar

För negation av uttryck med kvantifierare gäller

$$(1) \neg(\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$$

$$(2) \neg(\exists x P(x)) \equiv \forall x \neg P(x)$$

($\forall$ generaliserat $\wedge$, $\exists$ generaliserat $\vee$.)