

Föreläsning 11

Rekurrensrelationer

Definition En *rekurrensrelation* för en följd $a_0, a_1, \dots$ är en ekvation som uttrycker a_n i termer av sina föregångare $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$.

För att en rekurrensrelation ska definiera en följd, krävs dessutom att värdet på a_0 och eventuellt ännu fler av de första elementen i följderna är givna. Dessa givna värden kallas *begynnelsevillkor*.

Exempel: Vi har tidigare stött på Fibonacci följderna $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ definierad genom

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

och $f_1 = 1, f_2 = 1$.

Exempel: Bankbok. Antag att man på ett bankkonto har räntan r . Om P_n är beloppet på kontot efter n år, gäller rekurrensrelationen

$$P_n = (1 + r)P_{n-1}$$

Begynnelsevärdet P_0 är den summa pengar som sattes in från början.

Exempel: Låt S_n vara antalet strängar över mängden $X = \{a, b, c\}$ av längd n som inte innehåller mönstret aaa . Ge en rekurrensrelation för S_n .

Delar upp strängarna av längd n i

1) De som börjar på b

2) De som börjar på c

3) De som börjar på ab

4) De som börjar på ac

5) De som börjar på aa

Enligt additionsprincipen ges S_n av summan av de strängar av varje typ som inte innehåller aaa

- I 1) kan inte resten av strängen innehålla aaa , ger S_{n-1} möjligheter
- I 2) kan inte resten av strängen innehålla aaa , ger S_{n-1} möjligheter
- I 3) kan inte resten av strängen innehålla aaa , ger S_{n-2} möjligheter
- I 4) kan inte resten av strängen innehålla aaa , ger S_{n-2} möjligheter
- I 5) måste tredje elementet vara antingen b eller c och resten får inte innehålla aaa .

Ger $2S_{n-3}$ möjligheter

Vi får rekurrensrelationen

$$S_n = 2S_{n-1} + 2S_{n-2} + 2S_{n-3}$$

Begynnelsevärden är $S_1 = 3$ (samtliga strängar av längd 1)

$S_2 = 9$ (samtliga strängar av längd 2)

$S_3 = 26$ (samtliga strängar av längd 3 utom aaa .)

Att lösa en rekurrensrelation är att hitta ett explicit uttryck för a_n .

Exempel:

Lös rekurrensrelationen

$$a_n = 2^n a_{n-1}, a_0 = 1.$$

Denna rekurrensrelation kan lösas genom *iteration*

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n a_{n-1} = 2^n 2^{n-1} a_{n-2} = \dots \\ &= 2^n 2^{n-1} \dots 2^{n-(n-1)} a_{n-n} = 2^{\sum_{k=1}^n k} a_0 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \end{aligned}$$

Denna metod kan vara användbar i vissa enkla fall, exvis om man endast har a_{n-1} inblandad i HL

Definition En *linjär homogen rekurrensrelation av ordning k med konstanta koefficienter* är en rekurrens relation på formen

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, c_k \neq 0$$

Exempel: $a_n = 7a_{n-1} + 4a_{n-2}$ är av denna typ (ordning 2)

$a_n = 3a_{n-4} + a_{n-5}$ är också av denna typ (ordning 5)

$a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-2} a_{n-3}$ är inte av denna typ (icke-linjär)

$a_n = n a_{n-1} + 3^n a_{n-2}$ är inte av denna typ (koefficienter är inte konstanta)

En Linjär homogen rekurrensrelation med konstanta koefficienter tillsammans med begynnelsevärden

$$a_0 = C_0, \quad a_1 = C_1, \dots, \quad a_{k-1} = C_k$$

definierar en unik följd $a_0, a_1, \dots$

DVS det finns precis en följd som uppfyller detta.

Om man inte specificerar begynnelsevärden så finns det oändligt många lösningar till rekurrensrelationen. Det visar sig att man kan hitta dessa genom att bestämma rötterna till ett polynom.

Definition Den *karaktäristiska ekvationen* till den linjära homogena rekurrensrelationen med konstanta koefficienter

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \quad c_k \neq 0$$

är ekvationen

$$t^k - c_1 t^{k-1} - \dots - c_k = 0$$

Vi kommer enbart arbeta med ordning 2. (Eftersom det är enkelt att lösa karaktäristiska ekvationen då)

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}$$

Sats

Om karaktäristiska ekvationen

$t^2 - c_1 t - c_2 = 0$ har två distinkta rötter $r_1 \neq r_2$ så kan samtliga lösningar skrivas på formen

$$a_n = B_1 r_1^n + B_2 r_2^n.$$

Bevis: Se kursboken.

För den unika lösningen för givna begynnelsevärden får man sätta in värden.

Exempel: Lös

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} \quad (*)$$

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 7$$

Kar. Ekv.

$$t^2 - t - 2 = 0 \text{ har rötter } r_1 = 2 \text{ och } r_2 = -1$$

Alltså ger $a_n = B_1 2^n + B_2 (-1)^n$ samtliga lösningar till (*)

Bestämmer B_1 och B_2

$$a_0 = 2 = B_1 + B_2 \quad (1)$$

$$a_1 = 7 = 2B_1 - B_2 \quad (2)$$

$$(1)+(2) \text{ ger } 3B_1 = 9, B_1 = 3$$

$$\text{Insatt i (2) ger } B_2 = 6 - 7 = -1$$

$$a_n = 3 \cdot 2^n - (-1)^n = 3 \cdot 2^n + (-1)^{n+1}$$

är lösningen till (*) med givna begynnelsevärden.

Sats

Om karaktäristiska ekvationen

$t^2 - c_1 t - c_0 = 0$ har en enda rot r (med multiplicitet 2) så kan samtliga lösningar skrivas på formen

$$a_n = B_1 r^n + B_2 n r^n.$$

Bevis: se kursboken.

Exempel: Lös

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} \quad (**)$$

$$a_0 = 1, a_1 = 6$$

Kar. Ekv.

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \text{ har dubbelroten } r = 3$$

Alltså ger $a_n = B_1 3^n + B_2 n 3^n$ samtliga lösningar till (**)

Bestämmer B_1 och B_2

$$a_0 = 1 = B_1$$

$$a_1 = 6 = 3B_1 + 3B_2$$

Vi får $B_1 = 1$ och $B_2 = 1$ och

$a_n = 3^n + n 3^n$ löser (**) med givna begynnelsevärden.

Generellt gäller följande:

Sats Om $r_1, r_2, \dots, r_i$ är rötter med multiplicitet $m_1, m_2, \dots, m_i$ till karaktäristiska ekvationen till en rekurrensrelation så är ges alla lösningar av

$$a_n = (B_{1,0} + B_{1,1}n + \dots B_{1,m_1-1}n^{m_1-1})r_1^n \\ + (B_{2,0} + B_{2,1}n + \dots B_{2,m_2-1}n^{m_2-1})r_2^n$$

$$+ \dots + (B_{i,0} + B_{i,1}n + \dots B_{i,m_i-1}n^{m_i-1})r_i^n$$

Explicit formel för Fibonacci följd:

Kar. Ekv.

$$t^2 - t - 1 = 0 \text{ har rötter } r_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$f_n = B_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Löser man ut B_1 och B_2 mha $f_1 = 1$ och $f_2 = 1$

$$\text{får man } B_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, B_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Att använda $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ är enklare.