

Föreläsning 12

Grafer

Typer av grafer

Vägar

Cykler

Eulercykler

Definition En *graf* $G = (V, E)$ består av en, icke-tom, ändlig mängd V av hörn (noder) och en ändlig mängd E av kanter (bågar), där till varje kant $e \in E$ är tilldelat ett oordnat par $\{v_1, v_2\}$ av hörn. v_1 och v_2 kallas *ändpunkterna* till e .

Om två kanter e_1, e_2 är associerade till samma par av hörn $\{v_1, v_2\}$ kallas e_1 och e_2 för *parallella kanter*.

Om en kant e är associerad till ett oordnat par $\{v_1, v_1\}$ som består av samma hörn kallas e för en *loop*.

En graf som inte har några parallella kanter eller loopar kallas för en *enkel graf*.

Om ett hörn v inte är ändpunkt till någon kant så kallas v ett *isolerat* hörn.

Definition Den *fullständiga grafen* på n hörn, K_n är den **enkla** graf med n hörn som har en kant mellan varje hörn.

En graf G är *bipartit* om det finns delmängder V_1, V_2 av V (en av V_1, V_2 kan vara tom.)

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$ (Inte en partition av V eftersom en kan vara tom)

Så att varje kant $e \in E$ har ena ändpunkten i V_1 och den andra i V_2

Definition

En *väg* i en graf G är en alternerande följd

$p = v_0, e_1, v_1, e_2, v_3, \dots, e_k, v_k$ av hörn v_i och kanter e_i så att

v_{i-1} och v_i är ändpunkter till e_i .

v_0 är startpunkt och v_k slutpunkt för p .

En vägs *längd* är antalet kanter k i vägen.

Definition

En graf G är *sammanhängande* om det för varje par av hörn $v, w \in V$ finns en väg från v till w .

Definition

En graf $G' = (V', E')$ är en *delgraf* till en graf $G = (V, E)$ om

- (a) $V' \subset V$ och $E' \subset E$
- (b) om $e' \in E'$ har ändpunkter v_1 och v_2 så gäller att $v_1, v_2 \in V'$

Låt G vara en graf. För varje $v \in V$ kan vi definiera en sammanhängande delgraf G_v genom

$$G_v = (V_v, E_v),$$

$$V_v = \{\text{hörn som nås av någon väg från } v\}$$

$$E_v = \{\text{kanter som är del av någon väg från } v\}$$

G_v är en sammanhängande graf som kallas v :s komponent.

Varje graf G kan delas upp i ett antal sammanhängande komponenter.

Ekvivalensrelation på V genom vRw om det finns en väg från v till w .

V_v är v :s ekvivalensklass.

Definition Låt $p = v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$ vara en väg.

p är en *enkel väg* om den inte passerar något hörn mer än en gång. DVS

$$v_i \neq v_j \text{ för } i \neq j$$

p är en *cykel* (krets, sluten väg) om p har samma startpunkt och slutpunkt och inte passerar genom samma kant två gånger.

DVS $v_0 = v_k$ och $e_i \neq e_j$ för $i \neq j$.

p är en *enkel cykel* (krets, sluten väg) om p är en cykel som inte passerar något hörn mer än en gång.

DVS $v_i \neq v_j$ för $i \neq j$ **förutom** $v_0 = v_k$ och $e_i \neq e_j$ för $i \neq j$

Definition En *Eulercykel* i en graf G är en cykel som passerar genom alla kanter och

alla hörn i G

Definition Graden $\delta(v)$ av ett hörn $v \in V$ är antalet kanter som har v som ändpunkt. Varje loop bidrar med 2 till grafens grad.

Sats 1 En graf G har en Eulercykel om och endast om G sammanhängande och varje hörn har jämn grad. ($\delta(v) = 2m$ för varje $v \in V$.)