

# Föreläsning 3

Induktionsprincipen  
Starka induktionsprincipen  
Välordningsprincipen  
Divisionsalgoritmen  
Mängder

Induktion behöver inte börja från 1, Grundsteget kan vara  $P(n_0)$  för vilket heltal  $n_0$  som helst. Antag

- (1)  $P(n_0)$  är sant
  - (2) Om  $P(n)$  är sant för  $n \geq n_0$  så är  $P(n+1)$  sant
- Då är  $P(n)$  sant för varje  $n \geq n_0$

Exempel:

Visa att  $2^n < n!$  för varje heltal  $n \geq 4$

( $n! = n(n-1) \dots 1$  för  $n \geq 1$ , och  $0! = 1$ )

BEVIS:

Grundsteg: ( $n = 4$ ) VL= $2^4 = 16$ . HL= $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

VL < HL,  $P(4)$  är sant.

Induktionssteg: Antag  $2^n < n!$  ( $P(n)$ ) ( $n \geq 4$ ) ska visa  $2^{n+1} < (n+1)!$  ( $P(n+1)$ ).

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \stackrel{IndAnt}{<} 2 \cdot n! < (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

□

## Starka Induktionsprincipen

Låt  $P(n)$  vara en öppen utsaga, vars domän är alla heltal  $n \geq n_0$ . Antag att

- (1)  $P(n_0)$  är sant (Grundsteg)
  - (2) Om  $P(k)$  är sant för  $n_0 \leq k < n$  så är  $P(n)$  sann. (Induktionssteg)
- ( $P(n_0) \wedge \dots \wedge P(n-1) \rightarrow P(n+1)$  är sann)

Då är  $P(n)$  sann för varje  $n \geq n_0$

Vi kan alltså anta mera i steg (2). Därför kan stark induktion vara något att ta till om man inte klarar ett bevis med vanlig induktion. Man behöver ofta kontrollera fler än

ett grundsteg.

Exempel:

Visa att varje porto för 12 kronor eller mer (endast i hela kronor) kan klistras på ett kuvert enbart mha 4 och 5 kronors frimärken.

$P(n)$ : Det går att klistra på porto för  $n$  kronor mha 4 och 5 kronors frimärken.

Bevis:

Grundsteg

$P(12)$  är sann. Tre 4kr frimärken.

$P(13)$  är sann. Två 4kr och ett 5kr.

$P(14)$  är sann. Ett 4kr och två 5kr

$P(15)$  är sann Tre 5kr frimärken.

Induktionssteg.

Låt  $n \geq 16$ . Antag  $P(k)$  sant för  $12 \leq k < n$ . Måste visa att  $P(n)$  är sant.

Vi vet att  $P(n-4)$  är sant. ((Här behövdes att vi kollat de fyra första stegen)) Alltså kan vi klistra på frimärken för  $n-4$  kronor och sedan lägga till ett 4 kronors frimärke.  $P(n)$  är också sant. QED

## Mängder

**Definition** En *mängd* är en väldefinierad samling objekt, där väldefinierad betyder att man ska kunna avgöra om ett godtyckligt objekt tillhör mängden eller inte. Objekten i en mängd kallas mängdens *element*.

Vi skriver  $x \in M$  om  $x$  är ett element i mängden  $M$  och

$x \notin M$  om  $x$  inte tillhör  $M$ .

Väldefinierad betyder alltså att  $x \in M$  ska vara en öppen utsaga.

Mängder kan beskrivas antingen på *explicit form* genom att ange alla element

Exempel:  $A = \{4, 5, 9\}$

eller, vilket är nödvändigt om mängden inte består av ett ändligt antal element, på *implicit form* genom att ange vilka egenskaper som krävs för att vara ett element i mängden.

Exempel:  $B = \{n \mid n \text{ är kvadraten av ett heltal}\} = \{n \mid n = m^2, m \in \mathbb{Z}\}$

Om  $X$  är ändlig mängd så är

$|X|$ =antalet element i  $X$ .

Mängden utan element kallas *tomma mängden* och skrivs  $\emptyset$ .  $\emptyset = \{ \}$

Två mängder  $X$  och  $Y$  är lika, skrivs  $X = Y$ , om de innehåller samma element.

Med logiska symboler så är  $X = Y$  samma sak som

$$\forall x ((x \in X \rightarrow x \in Y) \wedge (x \in Y \rightarrow x \in X)) \equiv \forall x (x \in X) \leftrightarrow (x \in Y)$$

Exempel: Vi visade förra föreläsningen att om

$$X = \{m \mid m \text{ är kvadraten av ett udda heltal}\} = \{m \mid m = (2k+1)^2, k \in \mathbb{Z}\} \text{ och}$$

$$Y = \{m \mid m \text{ är kvadraten av ett heltal och } m \text{ är udda}\} = \{m \mid m = n^2, n \in \mathbb{Z} \text{ och } m \text{ är udda}\}$$

så är  $X = Y$

Om varje element i en mängd  $X$  också är ett element i mängden  $Y$  säger vi att  $X$  är en delmängd av  $Y$ . Skrivs  $X \subseteq Y$ . Med logiska symboler

$$\forall x (x \in X \rightarrow x \in Y)$$

Då

$$\neg(\forall x (x \in X \rightarrow x \in Y)) \equiv \exists x \neg(x \in X \rightarrow x \in Y)$$

$$\equiv \exists x (x \in X) \wedge \neg(x \in Y) \equiv \exists x (x \in X) \wedge (x \notin Y)$$

så visar man att  $X$  inte är delmängd av  $Y$  genom att hitta ett motexempel  $x \in X$  som inte tillhör  $Y$ .

$X$  kallas för en *äkta delmängd* av  $Y$  om  $X \subseteq Y$  men  $X \neq Y$ . Dvs  $X$  är en delmängd av  $Y$  men det finns  $y \in Y$  så att  $y \notin X$ .

*Unionen* av två mängder är

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \vee x \in Y\}$$

*Snittet* av två mängder är

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \wedge x \in Y\}$$

Två mängder kallas *disjunkta* om

$$X \cap Y = \emptyset.$$

Unionen av två disjunkta mängder skrivs ibland  $X \sqcup Y$ .

Mängddifferensen, mellan  $X$  och  $Y$  är mängden

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \wedge x \notin Y\}$$

Även kallad relativa komplementet av  $Y$  i  $X$ .

Exempel

$$A = \{1, 4, 7\}, B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

$$A \cup B = \{7, x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 4\}$$

$$A \setminus B = \{7\}$$

## Välordningsprincipen

OBS tillhör §1.8

Varje icke tom delmängd av de naturliga talen  $\mathbb{N}$  innehåller ett minsta element.

$\forall S \subset \mathbb{N} : S$  har ett minsta element.

$P(S) : S$  har ett minsta element

Gör ett motsägelsebevis mha induktion.

Bevis: Anta motsatsen. Då finns en icke tom delmängd  $S \subset \mathbb{N}$  som inte har ett minsta element (alltså  $\neg P(S)$ )

Låt  $M = \{n \in \mathbb{N} : n < m \text{ för alla } m \in S\}$ ,

dvs alla naturliga tal som är mindre än varje tal i  $S$ . Observera att  $M \cap S = \emptyset$  för om  $n \in M$  så kan inte  $n \in S$ . (Då skulle ju  $n < n$ ). Vi visar mha induktion att  $M = \mathbb{N}$  vilket innebär att  $S$  är tomma mängden. En motsägelse till vårt antagande att  $S$  inte är tom.

$(Q(n) : n \in M, \text{ ska visa } Q(n) \text{ sant för varje } n)$

Grundsteg: Visar att  $0 \in M$ . 0 kan inte tillhöra  $S$  för då är 0 ett minsta element i  $S$ . Då är det klart att  $0 < m$  för varje  $m \in S$ . Alltså  $0 \in M$ .

Induktionssteg: Antar att  $n \in M$  måste visa att  $n + 1 \in M$ . Men enda chansen att  $n + 1$  inte tillhör  $M$  är att  $n + 1 \in S$ . Men då är  $n + 1$  ett minsta element i  $S$  (eftersom vi antagit  $n \in M$ ). Detta är en motsägelse till vårt antagande att  $S$  inte har ett minsta element.  $\square$

Mha av välordningsprincipen kan man visa:

**Divisionsalgoritmen** (Quotient remainder theorem)

((Använder vi i talteoridelen av kursen))

Om  $d$  och  $n$  är heltal ( $\in \mathbb{N}$ ),  $d > 0$  så finns det heltal  $q$  (kvot) och  $r$  rest så att

$$n = qd + r, \quad 0 \leq r < d$$

Dessutom är  $q$  och  $r$  unika. Dvs om

$$n = q_1d + r_1 \quad , \quad 0 \leq r_1 < d$$

och

$$n = q_2d + r_2 \quad , \quad 0 \leq r_2 < d,$$

så är  $r_1 = r_2$  och  $q_1 = q_2$

BEVIS: Se kursboken.

Ofta när man arbetar med mängder finns det en given mängd  $\mathcal{U}$  som mängderna (ibland underförstått) är delmängder av. Detta  $\mathcal{U}$  kallas då universalmängden och man definierar komplementet till en mängd som

$$\bar{X} = X^c = \{x \notin X\} = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin X\}$$

I exemplet ovan är det naturligt att betrakta  $\mathbb{R}$  som universalmängd, och då är

$$A^c = \{x \mid x \neq 1 \wedge x \neq 4 \wedge x \neq 7\}$$

$$B^c = \{x \mid x > 5\}$$

Mha *Venn diagram* kan man få en uppfattning (mental bild) av mängder och operationer på mängder.

En rektangel föreställer universalmängden p.s.s. att element i universalmängden identifieras med punkter i rektangeln. Delmängder av universalmängden representeras av cirklar genom att man tänker sig att element i delmängderna är precis de element som identifierats med punkter innanför cirkeln.

Exempel De Morgans lagar för mängder:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

OBS!! Venn diagrammen i sig är inga bevis!!