

Föreläsning 4

Indexmängder
Kartesisk produkt
Funktioner
Injektion
Surjektion
Bijektion
Invers funktion

Definition Mängden av alla delmängder till en mängd X kallas *potensmängden* till X och skrivs $\mathcal{P}(X)$.

Sats Om $|X| = n$ så är $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$. Dvs en mängd med n element har 2^n delmängder.

Bevis: Bevisar mha induktion.

Grundsteg: $n = 0$. Mängden utan element är tomma mängden $\emptyset$ och den enda delmängden till $\emptyset$ är $\emptyset$ själv. Alltså $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ och $|\mathcal{P}(\emptyset)| = 1 = 2^0$.

Induktionssteg. Antag sant för n visar sant för $n+1$. Låt X vara en mängd med $n+1$ element. Vi måstge visa $|\mathcal{P}(X)| = 2^{n+1}$.

Låt $x \in X$. Då är $\mathcal{P}(X)$ en disjunkt union av följande mängder:

$$\mathcal{P}(X) = \{A \subseteq X \mid x \notin A\} \sqcup \{B \subseteq X \mid x \in B\} = M_1 \sqcup M_2$$

och alltså är $|\mathcal{P}(X)| = |M_1| + |M_2|$.

Men $M_1 = \{A \mid A \subseteq X \setminus \{x\}\} = \mathcal{P}(X \setminus \{x\})$. Eftersom $|X \setminus \{x\}| = n$ så är $|M_1| = 2^n$ (induktionsantagandet).

Och vi har att $M_2 = \{A \cup \{x\} \mid A \subseteq X \setminus \{x\}\}$ så att varje element i M_2 motsvaras av ett i M_1 . (De kan paras ihop två och två). Då måste $|M_2| = |M_1| = 2^n$ och $|\mathcal{P}(X)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ $\square$

Det är ofta nödvändigt att arbeta med unioner eller snitt av fler än ett ändligt antal mängder. Låt M vara en mängd och anta att A_α är en delmängd i en given universalmängd $\mathcal{U}$ för varje $\alpha \in M$ (M brukar kallas en *indexmängd*). Då definieras

$$\bigcup_{\alpha \in M} A_\alpha = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A_\alpha \text{ för något } \alpha \in M\}$$

och

$$\bigcap_{\alpha \in M} A_\alpha = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A_\alpha \text{ för varje } \alpha \in M\}$$

Extra viktigt är exempel då indexmängden är $\mathbb{N}$ (eller alla $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$). Då skriver man

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad ((\bigcup_{n=n_0}^{\infty} A_n))$$

respektive

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad ((\bigcap_{n=n_0}^{\infty} A_n)).$$

Exempel: $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq n\}$ $n = 1, 2, 3 \dots$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \mid x \geq 1\}$$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset.$$

Om vi definierar A_n som ovan för alla $n \in \mathbb{Z}$ får vi

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n = \mathbb{R}$$

Definition om X och Y är två mängder är ett *ordnat par* ett objekt på formen (x, y) där $x \in X$ och $y \in Y$.

Två ordnade par (a, b) och (c, d) är lika $((a, b) = (c, d))$ om och endast om $a = c$ och $b = d$. Man skiljer alltså på (a, b) och (b, a) (Därför ordet ordnat...)

$(a, b) = (b, a)$ gäller endast om $b = a$.

Den *kartesiska produkten* av X och Y definieras som

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ och } y \in Y\}$, dvs mängden av alla ordnade par från X och Y .

Man kan också bilda kartesiska produkter av fler än två mängder, exvis

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y \text{ och } z \in Z\}$$

Exempel: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ identifieras med planet.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ identifieras med rummet.

Om X och Y är ändliga mängder så är $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

Funktioner

Definition Låt X och Y vara två icke tomma mängder. En *funktion* f från X till Y är en regel som till varje element $x \in X$ ordnar precis ett element $y \in Y$. Skrivs

$f : X \rightarrow Y$ och elementet $y \in Y$ som blir tillordnat $x \in X$ skrivs $f(x)$.

Synonym till funktion är *avbildning*, och man säger att x avbildas på $y = f(x)$, y kallas *bilden* av x .

Funktioner används i matematik för att beskriva samband. Tänk exempelvis på hur $f(x) = x^2$ beskriver sambandet mellan längden på sidorna på en kvadrat och dess area.

Men det måste naturligtvis inte finnas en vettig tolkning av funktionen. Bara definitionen ovan ska vara uppfylld.

Fler exempel $\lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$

$\lceil \cdot \rceil : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x\}$

Viktigt exempel till senare: *modulo operatorn*

mod: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$

$n \bmod d$ = resten då n delas med d

dvs om $n = qd + r$ så är $n \bmod d = r$

OBS!! Entydigheten i divisionsalgoritmen behövs för att detta ska vara en funktion.

OBS!! Skrivsättet, istf $\bmod(n, d)$

Det går också att definiera en funktion som det görs i boken. En funktion f från X

till Y är en delmängd av $X \times Y$ med egenskapen att för varje $x \in X$ finns det precis ett $y \in Y$ så att $(x, y) \in f$.

Det är dock inte så intuitivt vad detta betyder som definitionen ovan. Denna delmängd av $X \times Y$ brukar ibland kallas funktionens graf. Generaliserar begreppet graf för funktioner från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$.

Man kan alltså beskriva en funktion genom att ange en delmängd av $X \times Y$.

För en funktion $f : X \rightarrow Y$ så kallas X för *definitionsområdet*, skrivs (ibland) D_f . Y kallas för funktionens *målmängd* och

$$V_f = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ för något } x \in X\}$$

kallas för funktionens *värdeområde*. ($V_f \subseteq Y$)

Två funktioner f och g är lika om de har samma definitionsområde och målmängd, samt att $f(x) = g(x)$ för varje $x \in X$.

Om $f : X \rightarrow Y$ och $g : Y \rightarrow Z$ så är *sammansättningen* av f och g en funktion från X till Z definierad av

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

Exempel: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$.

$$g \circ f(x) = \sin x^2$$

$$f \circ g(x) = \sin^2 x$$

En funktion är *injektiv* (one to one) om

$$\forall x_1 \in X \forall x_2 \in X \quad f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

Dvs olika element avbildas på olika element

En funktion kallas *surjektiv* (onto) om

$$\forall y \in Y \exists x \in X \quad f(x) = y$$

Dvs varje element Y är bilden av något element $x \in X$.

Dvs $Y = V_f$

Exempel:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ är varken injektiv eller surjektiv då

$f(-1) = f(1)$ (ej injektiv) och det inte finns $x \in \mathbb{R}$ så att $f(x) = -1$ (ej surjektiv)

Exempel:

$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$ är injektiv men inte surjektiv
($\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$)

MEN!

$h : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = \sqrt{x}$

är både injektiv och surjektiv. Man kan alltid 'göra' en funktion surjektiv genom att ändra målmängden till värdemängden.

För att visa f injektiv. Börja med godtyckliga x_1, x_2 anta $f(x_1) = f(x_2)$ visa $x_1 = x_2$

För att visa f ej injektiv. Hitta $x_1 \neq x_2$ så att $f(x_1) = f(x_2)$

För att visa f surjektiv. Börja med godtyckligt $y \in Y$ hitta $x \in X$ så att $f(x) = y$.

För att visa f ej surjektiv. Hitta $y \in Y$ så att $f(x) \neq y$ för varje $x \in X$.

En funktion är *bijektiv* om den både är injektiv och surjektiv.

Exempel: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ är bijektiv.

Om $f : X \rightarrow Y$ är bijektiv så har den en *invers* funktion $f^{-1} : Y \rightarrow X$ definierad genom $f^{-1}(y) = x$ där $x \in X$ är det unika element $x \in S$ som avbildas på y dvs $f(x) = y$

Det följer att $f^{-1} \circ f(x) = x$ och $f \circ f^{-1}(y) = y$.

Exempel: $f(x) = x + 1$ har inversen $f^{-1}(y) = y - 1$.

Funktionen $\sqrt{x} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, har inversen x^2

$e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ har inversen $\ln x$.