

Föreläsning 5

Följder

Delföljder

Strängar

Relationer

Partiell och total ordning

Ekvivalensrelationer

Följder

Definition En *följd* s är en funktion med definitionsmängd $\mathbb{N}$, eller (mer sällan) en delmängd av $\mathbb{N}$ bestående av konsekutiva (på varandra följande) tal, dvs av typen $\{n, n+1, \dots, m\}$.

Observera att målmängden kan vara vilken mängd som helst. Dvs följder behöver inte vara följder av tal, det kan lika gärna vara följder av matriser, vektorer, funktioner etc.

Exempel: Följden

1, 4, 9, $\dots$, n^2 , $\dots$

som alltså definieras genom $s_n = n^2$, $n = 1, \dots$

kan skrivas $S = \{n^2\}_{n=1}^{\infty}$ (S beteckning på hela följden.)

$\left\{ \frac{1}{2k+1} \right\}_{k=2}^6$ är följden

$\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}$

En följd av tal kallas *växande* om $s_n < s_{n+1}$ för alla n (för vilka s_n är definierad)

En följd är *icke-avtagande* om $s_n \leq s_{n+1}$ för varje n

En följd är *avtagande* om $s_n > s_{n+1}$ för varje n

En följd av tal kallas *icke-växande* om $s_n \geq s_{n+1}$ för alla n (för vilka s_n är definierad)

Exempel:

Följden $\{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty}$, dvs $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$ är växande.

Den ändliga följden

3, 3, 2, 2, 1, 1

är icke-växande

Från en följd kan man skapa en ny följd genom att behålla vissa element i följd. En sådan följd kallas *delföljd* till den ursprungliga följd.

Formellt om $\{a_i\}_{i=m}^{\infty}$ är en följd, och n_k är en växande följd av tal i bland $m, m+1, \dots$ så är $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ en delföljd av $\{a_i\}_{i=m}^{\infty}$.

Exempel: Följden

$\{i^2\}_{i=1}^{\infty}, 1, 4, 9, \dots, n^2, \dots$

har en delföljd $\{(2k+1)^2\}_{k=0}^{\infty} = 0^2, 1, 9, 25, \dots, (2k+1)^2, \dots$ Kvadrater av udda tal.

$((a_i = i^2, n_k = 2k+1)_{k=0}^{\infty})$

Om $\{a_i\}_{i=m}^n$ är en följd så används notationen

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

och

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

Notationen används också för att skriva summor och produkter av elementen i oändliga följder, men då måste man förstås definiera vad man menar med detta...

Definition En *sträng* över en ändlig mängd X är en ändlig följd av element från X . strängen utan element kallas *nollsträngen* och skrivs λ .

Mängden av alla strängar över X skrivs X^* och mängden av alla strängar över X utom nollsträngen skrivs X^+ .

Längden av en sträng α är antalet element i strängen och skrivs $|\alpha|$.

För två strängar α, β så skriver man $\alpha\beta$ för strängen som består av α följt av β .

En delsträng av en sträng α är en sträng som består av konsekutiva (på varandra följande) element av strängen α

Exempel: $X = \{a, b, c\}$

$\alpha = abac$ och

$\beta = abccbaa = abc^2ba^2$ är strängar över X .

(OBS! $aa = a^2$ är bara formellt. Det ska inte ses som multiplikation!!!)

$|\alpha| = 4, |\beta| = 7$

$\alpha\beta = abacabc^2ba^2$

$\beta\alpha = abc^2ba^3bac$

$\gamma = cba$ är en delsträng av β .

Definition En *relation* R från en mängd X till en mängd Y är en delmängd av $X \times Y$.

En delmängd till $X \times X$ kallas för en relation på X .

$\{x \in X \mid (x, y) \in R \text{ för något } y \in Y\}$

kallas domänen av R

$\{y \in Y \mid (x, y) \in R \text{ för något } x \in X\}$

kallas bilden av R

Om $(x, y) \in R$ skriver man xRy .

Exempel:

$<$ är en relation på $\mathbb{R}$.

Den delmängd av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ som avses i definitionen är

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$

Exempel: 'delar' $\mid$ är en relation på $\mathbb{N}$. vi säger att $a \mid b$ om 'a delar b' om $b = qa$ för något $q \in \mathbb{N}$.

$\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \mid b\}$

Om X är en mängd är 'delmängd' $\subseteq$ en relation på $\mathcal{P}(X)$. $A \subseteq B$.

Funktioner är relationer. (Enligt definitionen av funktioner från X till Y som en speciell typ av delmängder av $X \times Y$.) Men alla relationer är inte funktioner.

En relation R på X kallas *reflexiv* om xRx för alla $x \in X$

En relation R på X kallas *symmetrisk* om xRy medför att yRx för alla $x, y \in X$

En relation R på X kallas *antisymmetrisk* om xRy och $x \neq y$ medför att $y \not R x$ för alla $x, y \in X$

En relation R på X kallas *transitiv* om xRy och yRz medför att xRz .

Exempel: $<$ på $\mathbb{R}$ är antisymmetrisk och transitiv

$|$ på $\mathbb{N}$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv

om $a | b$ och $b | c$ så är $b = q_1 a$ och $c = q_2 b$ alltså $ac = q_1 q_2 a$, $a | c$

$\subseteq$ är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

En reflexiv, antisymmetrisk och transitiv relation R på X är en *partiell ordning*.

Exempel: $|$ på $\mathbb{N}$ och $\subseteq$ på $\mathcal{P}(X)$ $\leq$ på $\mathbb{R}$

En partiell ordning med egenskapen att för x och y gäller antingen xRy eller yRx kallas för en *total ordning*.

$\leq$ är en total ordning på $\mathbb{R}$.

$\subseteq$ på $\mathcal{P}(X)$ och $|$ på $\mathbb{N}$ är inte en total ordning.

Om R_1 är en relation från X till Y och R_2 är en relation från Y till Z definieras *sammansättningen* $R_2 \circ R_1$ genom

$x R_2 \circ R_1 z$ om det finns $y \in Y$ så att xR_1y och yR_2z

Om R är en relation från X till Y så definieras den inversa relationen R^{-1} som en relation från Y till X genom $yR^{-1}x$ om xRy .

((Exempel barn, resp barnbarn och förälder)

Betraktade som relationer har funktioner alltid en invers relation, men det är enbart för bijektiva funktioner som den inversa relationen också är en funktion.

Om R är en ekvivalens relation på X och $x \in X$ så kallas mängden

$[x] = \{y \in X \mid xRy\}$

för x :s *ekvivalensklass*.

Exempel $\equiv \pmod n$, kongruens modulo n är en ekvivalens relation på $\mathbb{Z}$ som definieras genom

$a \equiv b \pmod n$ om a och b har samma rest vid division med n . Dvs $a \pmod n = b \pmod n$ enligt tidigare definition. Om $n = 3$ gäller exvis

$1 \equiv 4 \pmod 3$ och $2 \not\equiv 6 \pmod 3$

$[1] = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}$