

Föreläsning 6

Ekvivalensrelationer

Relationsmatriser

Algoritmer

Definition En relation R på en mängd X som är reflexiv symmetrisk och transitiv kallas en *ekvivalensrelation*.

Om R är en ekvivalens relation på X och $x \in X$ så kallas mängden

$$[x] = \{y \in X \mid xRy\}$$

för x 's *ekvivalensklass*.

Exempel $\equiv \pmod n$, kongruens modulo n är en ekvivalens relation på $\mathbb{Z}$ som definieras genom

$a \equiv b \pmod n$ om a och b har samma rest vid division med n . Dvs $a \pmod n = b \pmod n$ enligt tidigare definition. Om $n = 3$ gäller exvis

$$1 \equiv 4 \pmod 3 \text{ och } 2 \not\equiv 6 \pmod 3$$

$$[1] = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -2, 1, 4, 7, \dots\}$$

Sats

Låt R vara en ekvivalens relation på X . Då är två ekvivalensklasser antingen lika eller disjunkta. Dvs om $x, y \in X$ så är antingen $[x] = [y]$ eller $[x] \cap [y] = \emptyset$

Bevis: Låt $x, y \in X$. Anta att $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, dvs det finns minst ett element $z \in [x] \cap [y]$. Vi måste visa att detta medför att $[x] = [y]$.

Antag $w \in [x]$. Om vi visar att $w \in [y]$ så har vi visat $[x] \subseteq [y]$. Vi vet att xRw , xRz och yRz . Att R är symmetrisk gör att också zRx . Att R är transitiv gör då att också yRw . Alltså $w \in [y]$. och $[x] \subseteq [y]$

Pss visar man att $[y] \subseteq [x]$ alltså är $[x] = [y]$ $\square$.

Definition En *partition* av en mängd X är en uppdelning av X i parvis disjunkta icke tomma mängder, dvs en familj av delmängder $A_\alpha \subset X$ så att $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} A_\alpha$

$$A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \emptyset \text{ om } \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Exempel:

Om $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ så är $A_1 = \{1, 4\}$, $A_2 = \{2, 3\}$, $A_3 = \{5\}$ en partition av X

Låt $M_1 = \{\text{jämna heltal}\}$ och $M_2 = \{\text{udda heltal}\}$ då är M_1, M_2 en partition av $\mathbb{Z}$.

Följdsats Låt R vara en ekvivalensrelation på mängden X . Då är ekvivalensklasserna en partition av X . (Om vi bara räknar ekvivalensklasser som är olika) Bevis: Följer av föregående sats, plus att för varje element $x \in X$ så är $x \in [x]$ (Reflexivitet)

Exempel: Kongruens modulo 3.

$$[0] = \{3k, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[1] = \{3k + 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$[2] = \{3k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$$

ger en partition

$$\mathbb{Z} = [0] \sqcup [1] \sqcup [2]$$

Observera att omvänt så ger varje partition av en mängd ger upphov till en ekvivalensrelation på mängden.

Om

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in A} A_\alpha$$

är en partition av X . Definiera R genom xRy om $x \in A_\alpha$ och $y \in A_\alpha$, dvs x och y ligger i samma mängd.

Sats Låt R vara en ekvivalensrelation på en ändlig mängd X . Om varje ekvivalensklass har r element så finns det $|X|/r$ ekvivalensklasser.

Definition Låt R vara en relation mellan två ändliga mängder $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ och $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$. *Relationsmatrisen* till R är en $m \times n = |X| \times |Y|$ matris (a_{ij}) där $a_{ij} = 1$ om $x_i R y_j$ och $a_{ij} = 0$ om $x_i \not R y_j$.

OBS!! Man måste ha bestämt en ordning på elementen i X och på elementen i Y för att kunna definiera relationsmatrisen.

En relation på en mängd har alltid en kvadratisk relationsmatris.

Exempel: Låt $X = \{1, 2, 3\}$ $Y = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ och låt R vara relationen xRy om x är en delare till y . Relationsmatrisen är då

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sats Om R_1 är en relation från X till Y med relationsmatris A_1 och R_2 en relation från Y till Z med relationsmatris A_2 då fås relationsmatrisen till $R_2 \circ R_1$ m.a.p. den valda ordningen i X och Z genom att byta ut alla nollskilda element mot 1 i matrisen $A_1 A_2$.

Relationsmatrisens egenskaper hänger i hop med relationens egenskaper

En relation är reflexiv om och endast om relationsmatrisen inte har några nollor på diagonalen.

En relation är symmetrisk om och endast om relationsmatrisen är symmetrisk.

En relation är antisymmetrisk om och endast om relationsmatrisen har egenskapen att $a_{ij} = 1$ för $i \neq j$ medför att $a_{ji} = 0$.

En relation är transitiv om A^2 har nollskilda element på exakt samma positioner som A . Där A är relationsmatrisen.

Algoritmer

En algoritm är en ändlig mängd av exakta instruktioner för att utföra en beräkning eller lösa ett problem.

Följande karaktäriserar algoritmer

Algoritmer har *invärden* (input) och *utvärden* (output) som är element av någon specificerad mängd.

Algoritmer är *precisa* (exakta) dvs varje steg i algoritmen går bara att utföra på ett bestämt sätt.

Algoritmer är *deterministiska* dvs resultatet av varje delsteg är unikt och beror endast av input och resultat av tidigare delsteg.

Algoritmer är *ändliga* dvs de tar slut efter ett ändligt antal steg och varje steg tar ändlig tid att utföra.

Algoritmer är *korrekta* dvs utvärdena skall vara korrekt lösning på det givna problemet eller korrekt resultat av beräkningen

Algoritmer är *Generella* dvs en algoritm kan hantera en mängd (gärna oändlig..) av invärden.