UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
P. Winkler, S. Zibara
tel. 018-471 32 89 , 018-471 32 03

Prov i matematik
Ingenjörsprogrammen
Envariabelanalys IP1, 5 p.
2001-12-17

Skrivtid: 9–14. Tillåtna hjälpmedel: Manuela skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (**lämnas tillbaka** *tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem i del 1 är 3 och i del 2 är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 krävs minst 25 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng (bonus för redovisningsuppgifter och Deriveövningarna inräknad).*

LYCKA TILL *(och kom ihåg inrederivatan)*

DEL 1

1. Bestäm: a) $\arctan(-\sqrt{3})$, b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. Beräkna $\lim_{x\to\infty}(\ln(3x^3-1)-\ln(x^3-3x))$.

3. Beräkna derivatan till funktionen $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

4. Visa att $\int\frac{dx}{x^2+2x+2}=\arctan\frac{x}{x+2}+C$.

5. Bestäm arean av det område som begränsas av kurvan $y=x^2-2x-8$ positiva $x-$ axeln och $y-$ axeln.

DEL 2

6. Bestäm: a) $\int x^2\sin x\,dx$, b) $\int x\sin x^2\,dx$, c) $\int(2x^2\sin x-3x\sin x^2)\,dx$.

7. a) Visa genom att undersöka derivatan att funktionen $f(x)=4x-\sin\pi x$ är en strängt växande (alltså en inverterbar) funktion.
b) Bestäm även $(f^{-1})'(0)$, $(f^{-1})'(1)$ och $(f^{-1})'(4)$.

8. Ett snöre är 1 m långt. Det klipps i två bitar och av den ena biten formas en kvadrat, av det andra en cirkel. Bestäm största och minsta värdet av de sammanlagda areorna. (Det är också tillåtet att inte klippa alls, dvs. bilda en kvadrat eller en cirkel av hela snöret.)
Obs: Omkretsen av cirkeln med radien r ges av $2\pi\cdot r$ och arean ges av $\pi\cdot r^2$.

9. För **E** och **M**:

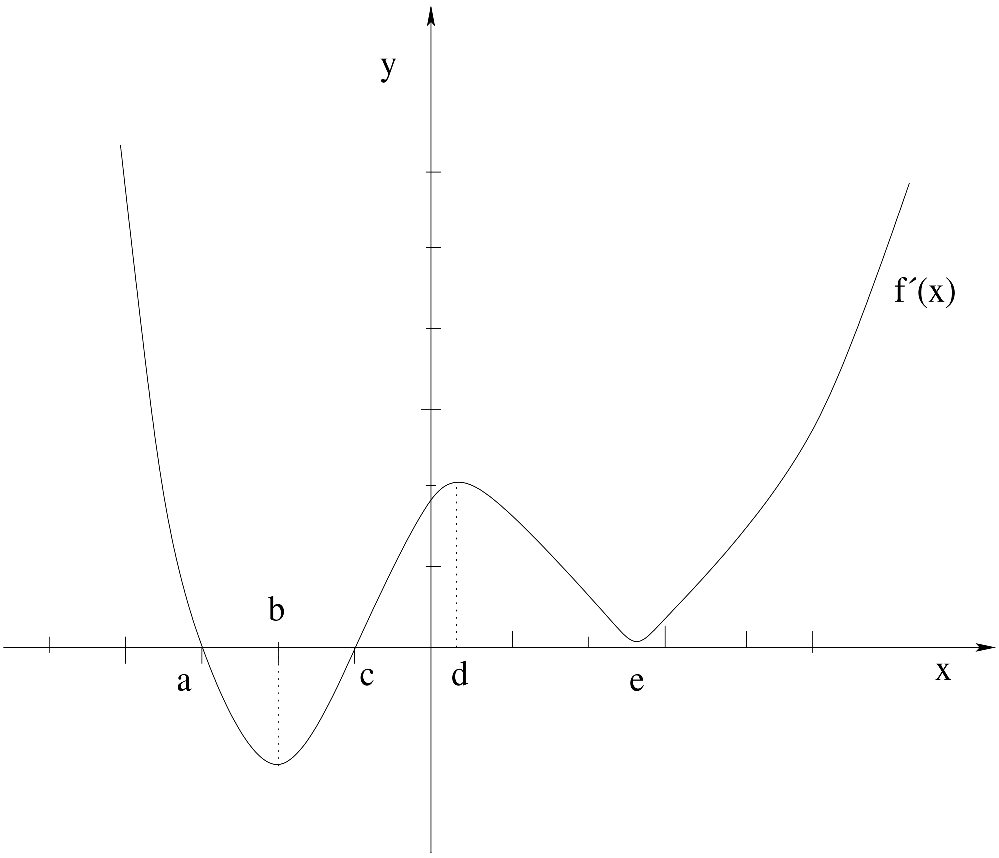
Partielbråkuppdela funktionen $f(x) = \dfrac{5x^2+8x+2}{(x+2)(x^2+2x+2)}$.

Bestäm $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

För **B** och **K**:

Lös begynnelseproblemet: $\begin{cases} y' + x^2 y = x^2 \\ y(0) = 2 . \end{cases}$

10. Figuren visar grafen till derivatan $y = f'(x)$. Vad kan sägas om funktionen f vid de markerade $x-$värdena $a - e$?



Svar till tentamen i Envariabelanalys IP1, 5 p. 2001-12-17

1. a) $\arctan(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$, b) $\arccos -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\pi}{6}$.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\ln(3x^3-1) - \ln(x^3-3x)) = \ln 3$.

3. $(\arcsin \dfrac{2x}{1+x^2})' = \dfrac{2}{1+x^2}$.

4. $(\arctan \dfrac{x}{x+2} + C)' = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

5. Arean $A = \dfrac{80}{3}$ a.e.

6. a) $\displaystyle\int x^2 \sin x\, dx = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$, b) $\displaystyle\int x\sin x^2\, dx = -\frac{\cos x^2}{2} + C$,

c) $\displaystyle\int (2x^2\sin x - 3x\sin x^2)\, dx = 2((2-x^2)\cos x + 2x\sin x) + \frac{3\cos x^2}{2} + C$.

7. b) $(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{4-\pi}$, $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{4}$ och $(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{4+\pi}$.

8. Största värdet är $\dfrac{1}{4\pi}$ och minsta värdet är $\dfrac{1}{4(4+\pi)}$.

9. För **E** och **M**:

$$f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{2x-2}{x^2+2x+2}.$$
$$\int f(x)\, dx = \ln(x^2+2x+2) + 3\ln|x+2| - 4\arctan(x+1) + C.$$

För **B** och **K**:

$$y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}.$$

10. I punkten a funktionen f har maximipunkt,
i punkten b funktionen f har en inflexionspunkt,
i punkten c funktionen har en minimipunkt,
i punkten d funktionen har en inflexionspunkt,
i punkten e funktionen har en terrasspunkt.

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys IP1, 5 p. 2001-12-17

Lösning till problem 1.

a) $\arctan(-x) = -\arctan x$ och därför $\arctan(-\sqrt{3}) = -\arctan\sqrt{3} = -\dfrac{\pi}{3}$.

b) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ för $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$ och därför $\arccos(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$.

Lösning till problem 2.

$$\lim_{x\to\infty}(\ln(3x^3-1)-\ln(x^3-3x)) \lim_{x\to\infty}\ln\frac{3x^3-1}{x^3-3x} = \ln(\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-1}{x^3-3x}) = \ln(\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}}) = \ln 3\,.$$

Lösning till problem 3.

$$(\arcsin\frac{2x}{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2\cdot(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-4x^2}}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2}}\cdot\frac{2(1-x^2)}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}\,.$$

Lösning till problem 4.

$$(\arctan\frac{x}{x+2}+C)' = \frac{1}{1+(\frac{x}{x+2})^2}\cdot\frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)^2}{(x+2)^2+x^2}\cdot\frac{2}{(x+2)^2} = \frac{2}{2x^2+4x+4}$$
$$= \frac{2}{2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x^2+2x+2}\,.$$

Lösning till problem 5.

Arean $A = -\displaystyle\int_0^4 (x-2x-8)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}-x^2-8x\right]_0^1 = -\frac{64}{3}+16+32 = \frac{96+48-64}{3} = \frac{80}{3}$

Lösning till problem 6.

a) $\displaystyle\int x^2\sin x\,dx$ { partiell integration } $\displaystyle = -x^2\cos x - \int 2x(-\cos x)\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$

{ en gång till partiell integration } $\displaystyle = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x - \int\sin x\,dx\right)$

$= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x + C$,

b) $\displaystyle\int x\sin x^2\,dx = \left\{t = x^2\right\} = \frac{1}{2}\int\sin t\,dt = -\frac{\cos t}{2}+C = -\frac{\cos x^2}{2}+C$,

c) Genom att utnyttja resultat i a) och b) får man att

$$\int(2x^2\sin x - 3x\sin x^2)\,dx = 2\left((2-x^2)\cos x + 2x\sin x\right) - 3\left(-\frac{\cos x^2}{2}\right) + C$$
$$= 2\left((2-x^2)\cos x + 2x\sin x\right) + \frac{3\cos x^2}{2} + C\,.$$

Lösning till problem 7.

$f'(x) = 4-\pi\cos\pi x \ge 4-\pi > 0$. Derivatan är positiv medför att funktionen $f(x)$ är strängt växande, alltså även inverterbar. Satsen om derivatan för den inversa funktionen säger då att $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, där $y_0 = f(x_0)$.

$(f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{4-\pi\cos\pi\cdot 0} = \dfrac{1}{4-\pi}$, ty $f(0) = 0$. $\quad(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{4-\pi\cos\frac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{4}$, ty $f(\dfrac{1}{2}) = 4\cdot\dfrac{1}{2} - \sin\dfrac{\pi}{2} = 2-1 = 1$. $\;(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{4-\pi\cos\pi} = \dfrac{1}{4+\pi}$, ty $f(1) = 4-\sin\pi = 4$.

Lösning till problem 8.

Klipp en bit av längden x. Kvadraten får då en sida med längden $\frac{x}{4}$ och cirkeln får radien $\frac{1-x}{2\pi}$.
Arean blir då: $A(x) = (\frac{x}{4})^2 + \pi\frac{(1-x)^2}{4\pi^2} = \frac{x^2}{16} + \frac{(1-x)^2}{4\pi}$. $A'(x) = \frac{x}{8} - \frac{1-x}{2\pi} = x(\frac{1}{8} + \frac{1}{2\pi}) - \frac{1}{2\pi}$.
$A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{4+\pi}$. Teckenväxling där är $-0+$ vilket ger minimum. Lokala maximua i 0 och i 1. $A(0) = \frac{1}{4\pi}$ och $A(1) = \frac{1}{16}$. $A(0) > A(1)$.
Största värdet är $\frac{1}{4\pi}$ och minsta värdet är $\frac{1}{4(4+\pi)}$.

Lösning till problem 9.

För **E** och **M**:

$$\frac{5x^2+8x+2}{(x+2)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2} = \frac{A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+2)}{(x+2)(x^2+2x+2)}.$$

Alltså: $A(x^2+2x+2)+(Bx+C)(x+2) = 5x^2+8x+2$. Sätt in $x=-2$ och vi får $2A = 5\cdot 4 - 16 + 2 \Leftrightarrow A = 3$. Insättningen av $A = 3$ ger att
$(Bx+C)(x+2) = 5x^2+8x+2-3(x^2+2x+2) \Leftrightarrow Bx^2+(2B+C)x+2C = 2x^2+2x-4$
$\Leftrightarrow B = 2$ och $C = -2$. Alltså: $f(x) = \frac{3}{x+2} + \frac{2x-2}{x^2+2x+2}$.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \left(\frac{3}{x+2} + \frac{2x-2}{x^2+2x+2}\right) dx \\ &= 3\int \frac{dx}{x+2} + \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - 4\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx \\ &= 3\ln|x+2| + \ln(x^2+2x+2) - 4\arctan(x+1) + C.\end{aligned}$$

För **B** och **K**: Vi bestämmer först den integrerande faktorn: $IF(X) = e^{\int x^2 dx} = e^{\frac{1}{3}x^3}$.
Vilket ger oss: $\left(e^{\frac{1}{3}x^3}y\right)' = e^{\frac{1}{3}x^3}x^2$, eller ekvivalent $e^{\frac{1}{3}x^3}y = \int e^{\frac{1}{3}x^3}x^2\,dx$, där
$\int e^{\frac{1}{3}x^3}x^2\,dx = \{$ variabelbyte $t = \frac{1}{3}x^3\} = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{\frac{1}{3}x^3} + C$. Alltså är
$y(x) = 1 + Ce^{-\frac{1}{3}x^3}$. Villkoret $y(0) = 2$, ger $C = 1$, vilket ger oss lösningen $y(x) = 1 + e^{-\frac{1}{3}x^3}$.
(Obs! denna uppgift kan aven lösas som en separabel differentialekvation. Det ger naturligtvis samma svar och är självklart helt korrekt.)

Lösning till problem 10.

I punkten a derivatan $f'(a) = 0$ och ändrar tecknet från $+$ till $-$, alltså i a funktionen f har lokalt maximum. I punkten b derivatan till f har minimipunkt och därför $f''(b) = 0$ samtidigt som $f'(b) \neq 0$. Detta innebär att f har en inflexionspunkt i b. I punkten c $f'(c) = 0$ och derivatan ändrar tecknet från $-$ till $+$. Detta innebär att i punkten c funktionen f har lokalt minimum. I punkten d, analogt till punkten b funktionen f har en inflexionspunkt. I punkten d derivatan $f'(d) = 0$ men derivatan ändrar inte tecknet. Detta medför att i punkten d funktionen f har en terrasspunkt.