UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
P. Winkler, S. Zibara
tel. 018-471 32 89 , 018-471 32 03

Prov i matematik
Ingenjörsprogrammen
Envariabelanalys IP1, 5 p.
2002-01-14

*Skrivtid: 9–14. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (**lämnas tillbaka** tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem i del 1 är 3 och i del 2 är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 krävs minst 25 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng. Om du blir gokänd på den skriftliga tentamen, måste du kontakta oss innan 1 februari 2002, för att bestämma tid för muntlig tentamen.*

LYCKA TILL

DEL 1

1. Beräkna $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\tan(4x)}$.

2. Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{för} \quad x>a \\ 3-x & \text{för} \quad x\le a \end{cases} \quad \text{blir kontinuerlig för } x=a\,.$$

3. Bestäm den inversa funktionen till $f(x)=\tan 3x$ för $\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{6}$. Vad är definitionsmängd för den inversa funktionen.

4. En kurva i $xy-$ planet har ekvationen $x^2y^3+3xy+x^2=3$. Använd implicit derivering för att bestäma ekvationen för kurvans tangent i punkten $(-1,2)$.

5. Beräkna $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{1+\tan^2 x}\,dx$.

DEL 2

6. Visa genom att beräkna derivatan, att funktionen $f(x)=\arctan(x+1)-\arctan\dfrac{x}{x+2}$ är konstant. Bestäm konstanten för alla $x>-2$.

7. a) Beräkna $\displaystyle\int_{-1}^{3}|x(x-1)(x-2)|\,dx$, b) Bestäm $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x^2+1)}$.

8. a) Beräkna volymen av den ellipsoid som uppstår när ellipsen $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ roterar kring $x-$ axeln.

b) Vilken volym har den ellipsoid som uppstår när ellispen $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ roterar kring $y-$ axeln.

9. För **E** och **M**:

Partielbråkuppdela funktionen $f(x) = \dfrac{4}{(x+1)(x^2-1)}$.

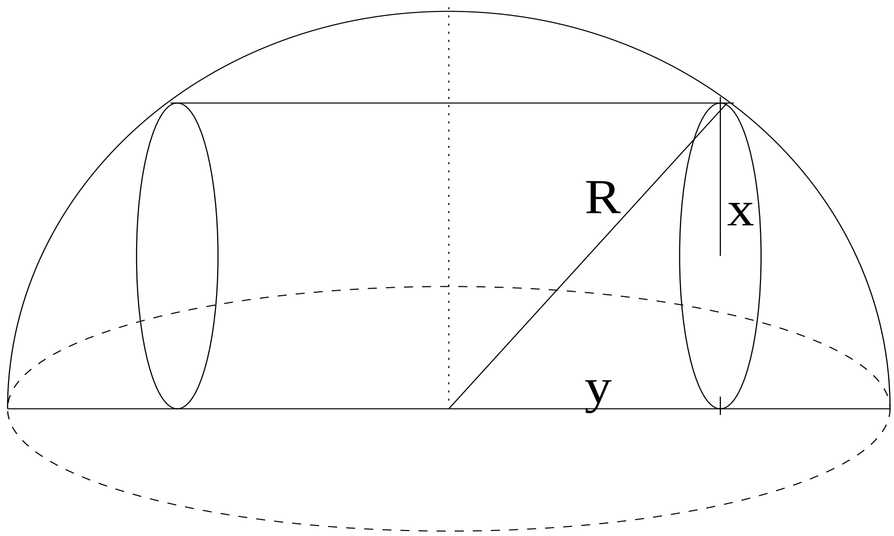
Bestäm $\displaystyle\int_2^{\infty} f(x)\,dx$.

För **B** och **K**:

Bestäm en integrerande faktorn tiii differentialekvationen och lös begynnelseproblemet:

$$\begin{cases} xy' - 3y = x^5 e^x \\ y(1) = 2\,. \end{cases}$$

10. I ett halvktot med radien R cm inskrives en rak cirkulär cylinder enligt figuren nedan. Bestäm cylinderns maximala volym.



Svar till tentamen i Envariabelanalys IP1, 5 p. 2002-01-14

1. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\tan(4x)} = \dfrac{3}{4}$.

2. $a = 2$

3. $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\arctan x$ med definitionsmängden $-\infty < x < +\infty$.

4. Tangentens ekvation är $4x - 3y + 10 = 0$.

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+\tan^2 x}\,dx = \frac{7}{24}$.

6. $f(x) = \dfrac{\pi}{4}$ för alla $x > -2$.

7. a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} |x(x-1)(x-2)|\,dx = 5$, b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{\ln 2}{2}$.

8. a) $V_x = \dfrac{8\pi}{3}$ v.e. b) $V_y = \dfrac{16\pi}{3}$ v.e.

9. För **E** och **M**:

$$f(x) = \frac{4}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}, \qquad \int_2^{\infty} f(x)\,dx = \ln 3 - \frac{2}{3}.$$

För **B** och **K**:

$$IF(x) = \frac{1}{x^3}, \qquad y(x) = x^3(x-1)e^x + 2x^3.$$

10. $V_{max} = V\left(\dfrac{R}{\sqrt{6}}\right) = \dfrac{1}{9}\pi R^3\sqrt{3}$.

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys IP1, 5 p. 2002-01-14

Lösning till problem 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(4x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 4x\sin(3x)}{3x\cdot 4x\tan(4x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{4x}{\tan(4x)}\cdot\frac{3}{4}\right)=$$
$$\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(3x)}{3x}\cdot\frac{4x}{\sin(4x)}\cdot\cos(4x)\right)=\frac{3}{4}\cdot 1\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{4}\,.$$

Lösning till problem 2.

Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig för $x=a\Leftrightarrow \lim x\to af(x)=f(a)=3-a\Leftrightarrow a-1=3-a\Leftrightarrow$ $a=2$.

Lösning till problem 3.

$y=\tan 3x\Leftrightarrow 3x=\arctan y\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}\arctan y$. Om $-\dfrac{\pi}{6}<x<\dfrac{\pi}{6}$ då $-\infty<y<+\infty$, alltså $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3}\arctan x$ med definitionsmängden $-\infty<x<+\infty$.

Lösning till problem 4.

Implicit derivering med avseende på x ger $2xy^3+x^2\cdot 3y^2\cdot y'+3y+3x\cdot y'+2x=0\Leftrightarrow$ $y'=\dfrac{-2xy^3-2x-3y}{3x^2y^2+3x}$, alltså för $x=-1$ och $y=2$ får man att $y'(-1)=\dfrac{4}{3}$.

Tangentens ekvation är då $y-2=\dfrac{4}{3}(x-(-1))\Leftrightarrow 4x-3y+10=0$.

Lösning till problem 5.

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{1+\tan^2 x}\,dx=\{\text{ formel }\mathbf{A\ 16}\ \}=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\cos^2 x\,dx=\left\{\begin{array}{ccc} t&=&\cos x\\ dt&=&-\sin x\,dx\end{array}\right\}=-\int_1^{\frac{1}{2}}t^2\,dt$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^1=\frac{7}{24}\,.$$

Lösning till problem 6.

$$f'(x)=\left(\arctan(x+1)-\arctan\frac{x}{x+2}\right)'=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{1+(\frac{x}{x+2})^2}\cdot\frac{x+2-x}{(x+2)^2}$$
$$=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{2}{(x+2)^2+x^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}-\frac{1}{x^2+2x+2}=0\,,\text{ alltså}$$

funktionen $f(x)$ är konstant i sin definitionsmängd. För att bestämma konstanten sätt in $x=1$. Man får $f(0)=\arctan 1-\arctan 0=\dfrac{\pi}{4}-0=\dfrac{\pi}{4}$.

Lösning till problem 7.

a) $$\int_{-1}^3|x(x-1)(x-2)|\,dx=\int_{-1}^0|x(x-1)(x-2)|\,dx+\int_0^1|x(x-1)(x-2)|\,dx+$$
$$+\int_1^2|x(x-1)(x-2)|\,dx+\int_2^3|x(x-1)(x-2)|\,dx=\int_{-1}^0(-x^3+3x^2-2x)\,dx+$$
$$+\int_0^1(x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_1^2(-x^3+3x^2-2x)\,dx+\int_2^3(x^3-3x^2+2x)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_{-1}^0$$
$$+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{x^4}{4}+x^3-x^2\right]_1^2+\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_2^3=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=5\,,$$

b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x(x^2+1)} = \lim_{T\to\infty}\int_1^T \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^T \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) dx =$

$$\lim_{T\to\infty}\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\int_1^T \frac{2x}{x^2+1}\,dx\right) = \lim_{T\to\infty}\left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_1^T =$$

$$\lim_{T\to\infty}\left(\ln\frac{T}{\sqrt{T^2+1}} - \ln\frac{1}{2}\right) = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\ln 2}{2}\,.$$

Lösning till problem 8.

a) Ellipsen är symmetrisk i $x-$ axeln och skär $x-$ axeln då $\dfrac{x^2}{4} = 1$, dvs i $x = \pm 2$.

Volymen av ellipsoiden ges då av "skivformeln" $V_x = \pi \displaystyle\int_{-2}^{2} y^2\,dx = \pi \int_{-2}^{2} (1 - \frac{x^2}{4})\,dx =$

$$\pi\left[x - \frac{x^3}{12}\right]_{-2}^{2} = 2\pi\left(2 - \frac{8}{12}\right) = 2\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{8\pi}{3}\,.$$

b) Ellipsen är symmetrisk i $y-$ axeln och skär $y-$ axeln då $y^2 = 1$, dvs i $y = \pm 1$.

Volymen av ellipsoiden ges då av "skivformeln" $V_y = \pi \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2\,dy = 4\pi \int_{-1}^{1} (1 - y^2)\,dy =$

$$4\pi\left[y - \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 8\pi\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 8\pi\cdot\frac{2}{3} = \frac{16\pi}{3}\,.$$

Lösning till problem 9.

För **E** och **M**:

$$f(x) = \frac{4}{(x+1)(x^2-1)} = \frac{4}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1} =$$

$\dfrac{A(x^2-1) + B(x-1) + C(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)}$, alltså för alla x gäller att

$4 = A(x^2-1) + B(x-1) + C(x+1)^2$. Sätt in $x = 1$. Man får $C = 1$. Insättningen av $x = -1$ ger $B = -2$ och insättningen av $x = 0$ ger att $A = -1$, alltså

$$f(x) = \frac{4}{(x+1)(x^2-1)} = -\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}\,.$$

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{T\to\infty}\int_2^T \left(-\frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{x-1}\right) dx = \lim_{T\to\infty}\left[-\ln|x+1| + \frac{2}{x+1} + \ln|x-1|\right]_2^T$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\ln\frac{T-1}{T+1} + \frac{2}{T+1} - \ln\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \ln 3 - \frac{2}{3}\,.$$

För **B** och **K**:

Ekvationen är en linjär ekvation som löses med hjälp av integrerande faktorn.

$xy' - 3y = x^5e^x \Rightarrow y' - \dfrac{3}{x}y = x^4e^x$.

En primitiv funktion till $g(x) = -\dfrac{3}{x}$ är $\displaystyle\int\left(-\frac{3}{x}\right) dx = -3\ln x$ för $x > 0$.

En integrerande faktor till differentialekvationen är $IF(x) = e^{-3\ln x} = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$.

Multiplikation av differentialekvationen $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4e^x$ med den integrerande faktorn $\dfrac{1}{x^3}$ ger

$\left(\dfrac{1}{x^3}y\right)' = xe^x$. Integrering genom partiell integration ger:

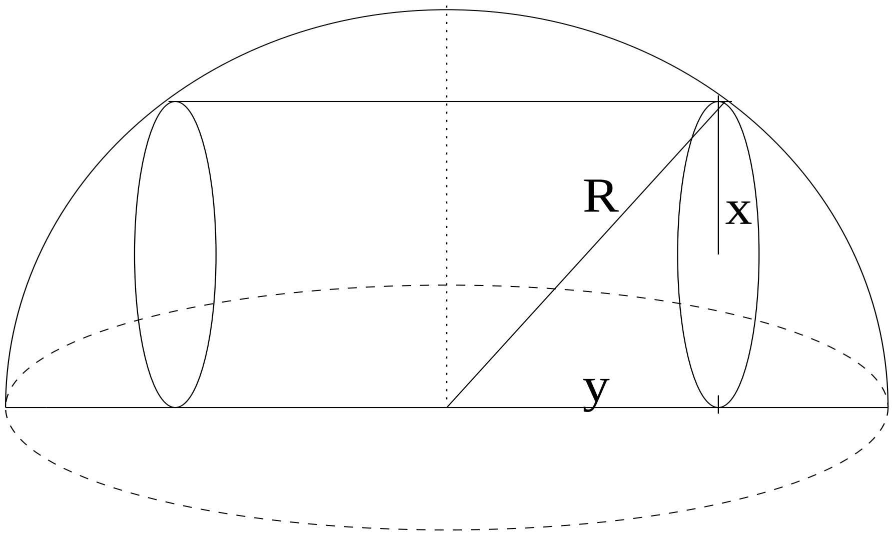
$\dfrac{1}{x^3}y = xe^x - e^x + C \Rightarrow y(x) = x^4e^x - x^3e^x + Cx^3$.

Begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ ger $2 = 1^4\cdot e - 1^3\cdot e + C\cdot 1^3 \Leftrightarrow C = 2$.

Den sökta lösningen till begynnelseproblemet är $y(x) = x^3e^x(x-1) + 2x^3$.

Lösning till problem 10.

Beteckningarna enligt figuren nedan, dvs. låt y beteckna halva av cylinderns längd och x vara basens radie. Enligt Phytagorassats gäller att $(2x)^2 + y^2 = R^2$ dvs. $y = \sqrt{R^2 - 4x^2}$.



Volymen av cylindern är $V = \pi \cdot x^2 \cdot 2y$, alltså $V(x) = 2\pi x^2 \sqrt{R^2 - 4x^2}$. $V(x)$ är definierad för $0 \leq x \leq \dfrac{R}{2}$. För $x = 0$ och $x = \dfrac{R}{2}$ gäller att $V(0) = V(\dfrac{R}{2}) = 0$, alltså största värdet för $V(x)$ antas i en inre punkt av intervallet $0 \leq x \leq \dfrac{R}{2}$, som måste vara en stationär punkt.

$V'(x) = 2\pi\left(2x\sqrt{R^2 - 4x^2} - \dfrac{4x^3}{\sqrt{R^2 - 4x^2}}\right) = \dfrac{4\pi x}{\sqrt{R^2 - 4x^2}}(R^2 - 6x^2)$. $V(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ eller $x = \dfrac{R}{\sqrt{6}}$. $V(x)$ antar sitt största värde för $x = \dfrac{R}{\sqrt{6}}$.

$$V_{max} = V\left(\frac{R}{\sqrt{6}}\right) = 2\pi\frac{R^2}{6}\sqrt{R^2 - \frac{4R^2}{6}} = \frac{1}{9}\pi R^3\sqrt{3}\,.$$