UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
P. Winkler, S. Zibara
tel. 018-471 32 89 , 018-471 32 03

Prov i matematik
Ingenjörsprogrammen
Envariabelanalys IP1, 5 p.
2002-08-21

Skrivtid: 9–14. Tillåtna hjälpmedel: Manuela skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (**lämnas tillbaka** *tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem i del 1 är 3 och i del 2 är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg 3 krävs minst 18 poäng, för betyg 4 krävs minst 25 poäng och för betyg 5 minst 32 poäng. Om du blir gokänd på den skriftliga tentamen, måste du kontakta oss innan 1 september 2002, för att bestämma tid för muntlig tentamen.*

LYCKA TILL

DEL 1

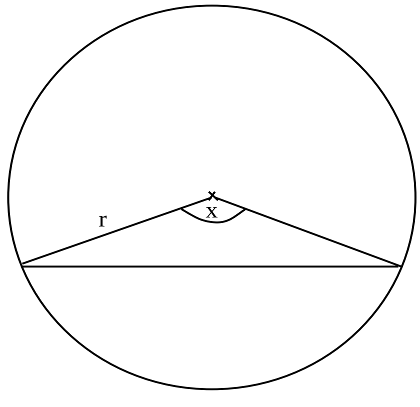
1. Bestäm: a) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

2. Beräkna: a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2x^3 - x + 2}{x^4 - 16}$, b) $\lim_{x\to 1} (x-1)\ln|x-1|$.

3. Visa att $\int \frac{1}{\cos x}\, dx = \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) + C\right)$, där C är en konstant.

4. Beräkna $\int_0^1 \arctan x\, dx$.

5. Vilken är den största (till arean) likbenta triangel som har sin spets i en cirkels medelpunkt och vars bas är en korda i cirkeln?
Ledning Antag att cirkelns radie är r och triangelns spets har vinkeln x som i figuren nedan.



Var god vänd!

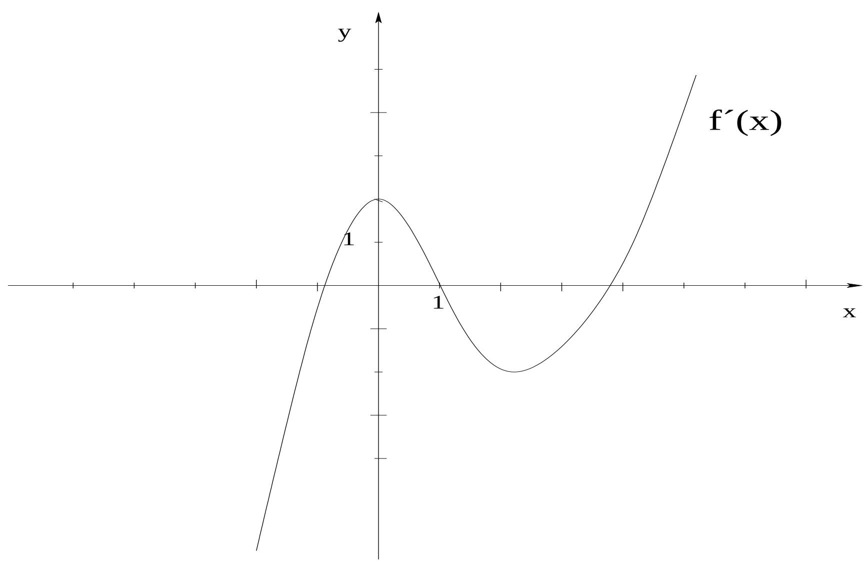
DEL 2

6. Figuren (nedan) visar grafen till derivatan $y = f'(x)$. För vilka x gäller att:

a) f är avtagande ? b) f har lokalt minimum ?

c) f har lokalt maximum ? d) Har funktionen f några inflexionspunkter ?

e) Skissera kurvan $y = f(x)$ om $f(0) = 0$.



7. Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+3x)+ax}{2x} & \text{för} \quad x \neq 0 \\ 5 & \text{för} \quad x = 0 \end{cases}$$

blir kontinuerlig i $x = 0$.

8. Beräkna den generaliserade integralen: $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+2}(x+3)}$.

9. För **E** och **M**:
Partielbråkuppdela funktionen $f(x) = \dfrac{4x+6}{(x+1)(x^2+4x+5)}$. Bestäm $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

För **B** och **K**:
Lös begynnelseproblemet: $\begin{cases} e^{x+y} \cdot y' = x \\ y(0) = 0. \end{cases}$

10. Bestäm volym för den rotationskropp, som alstras då området som begränsas av grafen till $y = \sin(x^2)$, $x-$axeln samt linjerna $x = 0$ och $x = \sqrt{\pi}$ roterar runt $y-$axeln.
Ledning: Använd "skalformeln": $V = 2\pi \displaystyle\int_a^b x f(x)\,dx$.

Svar till tentamen i Envariabelanalys IP1, 5 p. 2002-08-21

1. a) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}$, b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{5\pi}{6}$.

2. a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 2x^3 - x + 2}{x^4 - 16} = \frac{7}{32}$, b) $\lim_{x\to 1} (x-1)\ln|x-1| = 0$.

3. Visa att $\left(\frac{1}{2}\left(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) + C\right)\right)' = \frac{1}{\cos x}$.

4. $\int_0^1 \arctan x \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

5. Den som har rät vinkel vid medelpunkten, $x = \frac{\pi}{2}$.

6.

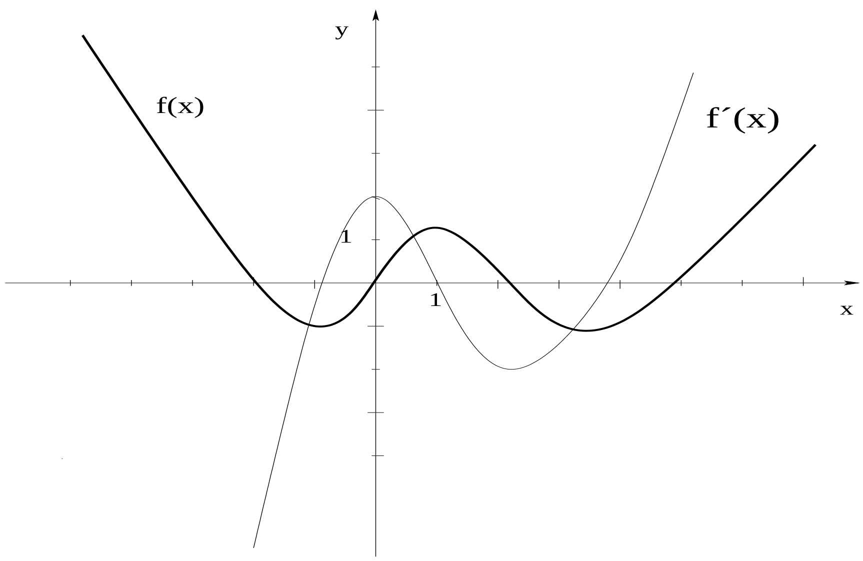
a) $f(x)$ är avtagande för $x \leq -1$ och för $1 \leq x \leq 4$,

b) $f(x)$ har lokalt minimum då $x = -1$ och $x = 4$,

c) $f(x)$ har lokalt maximum i $x = 1$,

d) $f(x)$ har två inflexionspunkter i $x = 0$ och i $x = 2$.

e) Grafen:



7. $a = 7$.

8. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x+2}(x+3)} = \frac{\pi}{3}$.

9. För **E** och **M**: $$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+4x+5}\,.$$
$$\int f(x)\,dx = 3\arctan(x+2) + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + C\,.$$

För **B** och **K**:
$$y(x) = \ln(2-(x+1)e^{-x})\,.$$

10. Rotationskroppen har volym $V = 2\pi$ v.e.

Lösningar till tentamen i Envariabelanalys IP1, 5 p. 2002-08-21

Lösning till problem 1.

a) $\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$, ty $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ för alla $0 \leq x \leq 1$ och $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, ty $0 \leq \arccos x \leq \pi$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ för alla $0 \leq x \leq 1$ och $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lösning till problem 2.

a) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2x^3-x+2}{x^4-16} = \lim_{x\to 2}\frac{x^3(x-2)-(x-2)}{x^2-4)(x^2+4)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x^3-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)(x^2+4)}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{8-1}{4\cdot 8} = \frac{7}{32}\,,$$

b) Sätt in $t = \frac{1}{|x-1|}$. Om $x \to 1$ då $t \to \infty$ och
$$\lim_{x\to 1}(x-1)\ln|x-1| = \pm\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t} = \mp\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$$ enligt standardgränsvärden.

Lösning till problem 3.

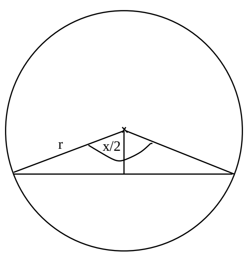
$$\left(\frac{1}{2}\left(\ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) + C\right)\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\sin x}\cdot\cos x - \frac{1}{1-\sin x}\cdot(-\cos x)\right)$$
$$= \frac{\cos x}{2}\left(\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}\right) = \frac{\cos x}{2}\cdot\frac{1-\sin x+1+\sin x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{2}\cdot\frac{2}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\,.$$

Lösning till problem 4.

Partiellintegrera:
$$\int_0^1 \arctan x\,dx = \int_0^1 1\cdot\arctan x\,dx = [x\arctan x]_0^1 - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

Lösning till problem 5.

Triangelns arean är $A(x) = \frac{1}{2}\cdot 2r\sin\frac{x}{2}\cdot r\cos\frac{x}{2} = \frac{r^2}{2}\sin x$. Arean är störst om x är en stationär punkt för $A(x)$, alltså om $A'(x) = \frac{r^2}{2}\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$.



Lösning till problem 6.

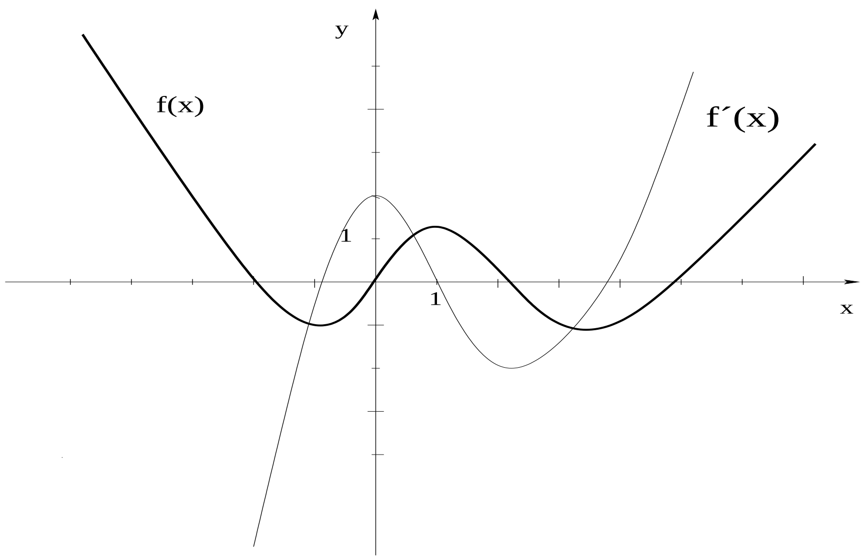
a) $f(x)$ är avtagande där $f'(x) < 0$, dvs. $f(x)$ avtar för $x < -1$ och för $1 < x < 4$.

b) $f(x)$ har lokalt minimum där $f'(x) = 0$ och $f'(x)$ ändrar tecknet från $-$ till $+$, dvs. $f(x)$ har lokalt minimum då $x = -1$ och $x = 4$.

c) $f(x)$ har lokalt maximum där $f'(x) = 0$ och derivatan $f'(x)$ ändrar tecknet från $+$ till $-$, alltså då $x = 1$.

d) $f(x)$ har två inflexionspunkter: en i $x = 0$ och andra i $x = 2$. I båda punkterna $f''(x) = 0$ och $f'(x) \neq 0$.

e) Grafen



Lösning till problem 7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)+ax}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{2x} + \frac{a}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln(1+3x)}{2\cdot 3x} + \frac{a}{2} = \frac{3+a}{2},$$

ty $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} = 1$. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 0$ om gränsvärdet är lika med funktionsvärdet i $x = 0$, dvs om $\dfrac{3+a}{2} = 5 \Leftrightarrow a = 7$.

Lösning till problem 8.

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+2}(x+3)} = \lim_{T\to\infty} \int_1^T \frac{dx}{\sqrt{x+2}(x+3)} = \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & \sqrt{x+2} \\ dt & = & \dfrac{dx}{2\sqrt{x+2}} \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{T\to\infty} \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{T+2}} \frac{2\,dt}{t^2+1} = \lim_{T\to\infty} \left[2\arctan t\right]_{\sqrt{3}}^{\sqrt{T+2}} = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Lösning till problem 9.

För **E** och **M**:

$$\frac{4x+6}{(x+1)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5} = \frac{A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+4x+5)}.$$

Alltså: $A(x^2+4x+5)+(Bx+C)(x+1) = 4x+6$. Sätt in $x = -1$ och vi får

$2A = 2 \Leftrightarrow A = 1$. Insättningen av $A = 1$ ger att
$(Bx + C)(x + 1) = 4x + 6 - (x^2 + 4x + 5) \Leftrightarrow Bx^2 + (B + C)x + C = -x^2 + 1$
$\Leftrightarrow B = -1$ och $C = 1$. Alltså: $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{x-1}{x^2+4x+5}$.

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x-1}{x^2+4x+5}\right) dx \\ &= \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx + 3\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx \\ &= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) + 3\arctan(x+2) + C\,.\end{aligned}$$

För **B** och **K**:
Differentialekvationen är separabel, ty $e^{x+y} \cdot y' = x \Leftrightarrow e^y \cdot y' = xe^{-x} \Leftrightarrow e^y = \int xe^{-x}\,dx$
Partiellintegration ger: $e^y = -xe^{-x} - \int 1 \cdot (-e^{-x})\,dx \Leftrightarrow e^y = -xe^{-x} - e^{-x} + C$, alltså vi får den allmänna lösningen $y(x) = \ln(C - (x+1)e^{-x})$. Begynnelsevillkoret $y(0) = 0$ ger $0 = \ln(C-1) \Leftrightarrow$ $C = 2$, alltså den sökta lösningen till begynnelseproblemet är $y(x) = \ln(2 - (x+1)e^{-x})$.

Lösning till problem 10.

$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx = \pi \int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(x^2)\,dx$. Sätt $t = x^2$ och $2x\,dx = dt$. Vi får:
$V = \pi \int_0^{\pi} \sin t\,dt = \pi\left[-\cos t\right]_0^{\pi} = 2\pi$.