

Skrivtid: 15.00–20.00. Hjälpmedel: Skrivdon, miniräknare och gula formelsamling. Tentamen består av 8 problem. Varje problem ger högst 5 poäng. Lösningarna skall vara åtföljda av förklarande text. För betygen 3, 4, 5 krävs 18, 25, respektive 32 poäng.

1. Bestäm talen:

a) $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2}))$, b) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2}))$, c) $\arctan(\sin(\frac{\pi}{2}))$,
d) $\sin(\arctan 1)$ och e) $\arccos(\ln e)$.

2. a) Beräkna: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+3} + x^2}{e^{x+2} - x^3}$,

b) Bestäm konstanten a så att $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x^2 - 4)}{\ln(x - 1)} = 1$

3. Låt $f(x) = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Beräkna $f'(x)$. Vad kan sägas om sambandet mellan $f(x)$ och funktionen $\arcsin x$?

4. Bestäm:

a) $\int x \arctan x \, dx$, b) $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| \, dx$, c) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} \, dx$.

5. Bestäm konstanterna a , b och c så att $\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2 + 2x + 2}$.

Bestäm även $\int \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} \, dx$.

6. Sträckan $y = 2x$ då $-1 \leq x \leq 2$, roterar kring y -axeln. Bestäm volymen för den uppkomna kroppen. *Ledning:* Rita figur.

7. Bestäm den rektangel som har största arean och två av sina hörn på x -axeln och två övriga på kurvan $y = \frac{1}{1+x^2}$.

Ledning: Rita grafen för $y = \frac{1}{1+x^2}$.

8. Vilken funktion uppfyller differentialekvationen $yy' - \frac{xy^2}{1+x^2} = 0$ och begynnelsevillkoret $y(0) = 1$?

Svar till tentamen i Envariabelanalys IP 1, 5 poäng 2007-01-12

1. a) $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2})) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, b) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2})) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\arctan(\sin(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{4}$,
d) $\sin(\arctan 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

och e) $\arccos(\ln e) = 0$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+3} + x^2}{e^{x+2} - x^3} = e$, b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x^2 - 4)}{\ln(x - 1)} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}$.

3. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $f(x) = \arcsin x$.

4.

a) $\int x \arctan x \, dx = \frac{1}{2}((x^2 + 1) \arctan x - x) + C$,

b) $\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| \, dx = \frac{11}{6}$,

c) $\int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} \, dx = \frac{\pi}{4}$.

5. $a = -1$, $b = 2$ och $c = 1$, dvs. $\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2 + 2x + 2}$.

$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} \, dx = \ln(x^2 + 2x + 2) - \ln|x+1| - \arctan(x+1) + C$.

6. $V = 6\pi$ v.e.

7. Rektangeln har sina hörn i punkterna $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$ och $(-1, \frac{1}{2})$.

Arean för rektangeln är 1 a.e.

8. $y(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Lösning till problem 1.

- a) $\cos(\arcsin(-\frac{1}{2})) = \cos(-\arcsin(\frac{1}{2})) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- b) $\sin(\arccos(-\frac{1}{2})) = \sin(\pi - \arccos(\frac{1}{2})) = \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
- c) $\arctan(\sin(\frac{\pi}{2})) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$,
- d) $\sin(\arctan 1) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,
- e) $\arccos(\ln e) = \arccos 1 = 0$.

Lösning till problem 2.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x+3} + x^2}{e^{x+2} - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x(e^3 + \frac{x^2}{e^x})}{e^x(e^2 - \frac{x^3}{e^x})} = \frac{e^3 + 0}{e^2 - 0} = e$, ty $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0$,
- b) Sätt $x - 2 = t$, $x \rightarrow 2 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x^2 - 4)}{\ln(x - 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a((t + 2)^2 - 4)}{\ln(t + 2 - 1)} = a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t + 4)}{\ln(t + 1)} =$$

$$a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t + 1)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (t + 4) = a \cdot 1 \cdot 4 = 4a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4}.$$

Lösning till problem 3.

$$\left(\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{(1-x^2+x^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

alltså derivatan för $f(x)$ är lika med derivatan för $\arcsin x$. Funktionen $f(x)$ och $\arcsin x$ skiljes med en konstant. $\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. Sätt in $x = 0$.

Man får $\arctan 0 = \arcsin 0 + C \Leftrightarrow C = 0$, alltså $f(x) = \arcsin x$.

Lösning till problem 4.

- a)
$$\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \, dx =$$

$$\frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} (x - \arctan x) + C =$$

$$\frac{1}{2} ((x^2 + 1) \arctan x - x) + C.$$
- b)
$$\int_0^3 |x^2 - 3x + 2| \, dx = \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) \, dx - \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) \, dx + \int_2^3 (x^2 - 3x + 2) \, dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_2^3 =$$

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) \right) + \left(9 - \frac{27}{2} + 6 - \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) \right) = \frac{11}{6},$$

$$c) \int_0^\infty \frac{x}{1+x^4} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{x}{1+x^4} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^{b^2} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$\frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} [\arctan t]_0^{b^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan b^2 - \arctan 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Lösning till problem 5.

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2 + 2x + 2} = \frac{a(x^2 + 2x + 2) + (x+1)(bx+c)}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} =$$

$$\frac{(a+b)x^2 + (2a+b+c)x + 2a+c}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)}, \text{ dvs. likheten gäller om}$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a+b & = & 1 \\ 2a+b+c & = & 1 \\ 2a+c & = & -1 \end{array} \right.$$

Om man subtraherar från andra ekvationen tredje får man att $b = 2$. Från första ekvationen får man då att $a = -1$ och då får man att $c = 1$, alltså:

$$\frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2 + 2x + 2}.$$

$$\int \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2 + 2x + 2} \right) dx = - \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2x+2-1}{x^2 + 2x + 2} dx =$$

$$- \ln|x+1| + \ln(x^2 + 2x + 2) - \int \frac{1}{(x+1)^2 + 1} dx = - \ln|x+1| + \ln(x^2 + 2x + 2) - \arctan(x+1) + C =$$

$$\ln(x^2 + 2x + 2) - \ln|x+1| - \arctan(x+1) + C.$$

Lösning till problem 6.

När sträckan roterar kring y -axeln uppstår en kropp bestående av två koner. Den ena med basradie 2 och höjden 4 och den andra med basradie 1 och höjden 2 l.e.

$$\text{Alltså volymen är } V = \frac{1}{3}\pi(2^2 \cdot 4 + 1^2 \cdot 2) = \frac{18}{3}\pi = 6\pi \text{ v.e.}$$

Lösning till problem 7.

Den rektangel som har största arean och har sina hörn dels på x -axeln dels på kurvan

$y = \frac{1}{1+x^2}$ har y -axeln som symmetriaxeln. Låt t beteckna halva längden av rektangelns bas. Då arean av en rektangel som har sina två övriga hörn på kurvan är

$$A(t) = 2 \cdot t \cdot \frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}. \text{ Denna funktion antar sitt största värde ty funktionen är aldrig}$$

negativ (för icke-negativa t) och $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t}{1+t^2} = 0$. Funktionen antar sitt största värdet i en

$$\text{stationär punkt, dvs där } A'(t) = 2 \cdot \frac{t^2 + 1 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow t = 1. \quad A(1) = 1.$$

Den rektangel som har största arean har arean lika med 1 a.e.

Lösning till problem 8.

Ekvationen kan skrivas om som $y(y' - \frac{xy}{1+x^2}) = 0 \Leftrightarrow y \equiv 0$ eller $y' - \frac{xy}{1+x^2} = 0$. $y \equiv 0$ uppfyller inte begynnelsevillkoret, alltså den sökta lösningen finns bland lösningar till ekvationen

$$y' - \frac{xy}{1+x^2} = 0 \text{ som är en separabel ekvation.}$$

$$y' - \frac{xy}{1+x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2} \Leftrightarrow \ln y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \Leftrightarrow y(x) = A\sqrt{1+x^2}, \text{ där } C \text{ och}$$

A är konstanter. Begynnelsevillkoret ger $1 = A\sqrt{1+0^2} = 1$, alltså den sökta funktionen är $y(x) = \sqrt{1+x^2}$.