

Skrivtid: 15–20. Hjälpmedel: Skrivdon, Gula formelsamling. Tentamen består av 8 problem. Varje problem ger högst 5 poäng. Lösningarna skall vara åtföljda av förklarande text. För betygen 3, 4, 5 krävs 18, 25, respektive 32 poäng.

1. a) Beräkna:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3 + x^3}{\ln x^3 - x^3},$$

- b) Bestäm konstanten a så att

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x^2 - 1)}{\ln x} = 2.$$

2. a) Visa genom beräkning, att derivatan för funktionen $f(x) = 2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ är lika med noll.

- b) Vad kan man säga om sambandet mellan funktionerna $2 \arctan x$ och $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$?

3. Bestäm:

$$\text{a) } \int x(1+x^2)^4 dx, \quad \text{b) } \int x\sqrt{x+1} dx, \quad \text{c) } \int_0^1 x \ln(1+x^2) dx.$$

4. Bestäm ekvationen för tangentlinjen till kurvan $xy^3 + x^2y = 6$ i punkten $(2, 1)$.

5. Beräkna:

$$\text{a) } \int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx, \quad \text{b) } \frac{d}{dx} (x^{\sin x}).$$

6. Vilken area har den rektangel som har största arean och är inskriven i ellipsen $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$?

7. Bestäm $\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)} dx$ genom att först partialbråkuppdelar $\frac{2x+1}{x(x^2+1)}$.

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - x^2y = 0$ som går genom punkten $(0, 1)$.

Svar till tentamen i Envariabelanalys IP 1, 5 poäng 2007-04-17

1. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3 + x^3}{\ln x^3 - x^3} = -1$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x^2 - 1)}{\ln x} = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

2. b) Funktionerna är lika.

3. a) $\int x(1 + x^2)^4 dx = \frac{(1 + x^2)^5}{10} + C$, b) $\int x\sqrt{x+1} dx = \frac{2\sqrt{x+1}(3x^2 + x - 2)}{15} + C$,
c) $\int_0^1 x \ln(1 + x^2) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

4. $x + 2y - 4 = 0$

5. a) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = 4$, b) $\frac{d}{dx} (\sin x^x) = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x} \right)$.

6. Arean = 4 a.e.

7. $\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$, $\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)} dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x + C$.

8. $y(x) = e^{\frac{x^3}{3}}$.

Lösning till problem 1.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^3 + x^3}{\ln x^3 - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3(3\frac{\ln x}{x^3} + 1)}{x^3(3\frac{\ln x}{x^3} - 1)} = \frac{0+1}{0-1} = -1$, ty $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^3} = 0$,
- b) Sätt $x - 1 = t$. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x^2 - 1)}{\ln x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a((t+1)^2 - 1)}{\ln(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(t(t+2))}{\ln(t+1)} =$
 $a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (t+2) = a \cdot 1 \cdot 2 = 2a = 2 \Leftrightarrow a = 1$.

Lösning till problem 2.

- a) $\left(2 \arctan x - \arcsin \frac{2x}{1+x^2}\right)' = \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} =$
 $\frac{2}{1+x^2} - \frac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2}} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = 0$.

- b) Funktionerna skiljes med en konstant, alltså $2 \arctan x = \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + C$. Sätt in $x = 0$.
 Man får $2 \arctan 0 = \arcsin 0 + C \Leftrightarrow C = 0$, alltså funktionerna är lika.

Lösning till problem 3.

- a) Sätt $t = 1 + x^2$, då $dt = 2x dx$ och $x dx = \frac{1}{2} dt$, alltså $\int x(1+x^2)^4 dx = \frac{1}{2} \int t^4 dt =$
 $\frac{1}{2} \frac{t^5}{5} + C = \frac{(1+x^2)^5}{10} + C$,
- b) Sätt $t = x + 1$, då $x = t - 1$, $dt = dx$ och $\int x\sqrt{x+1} dx = \int (t-1)\sqrt{t} dt =$
 $\int (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}}) dt = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{x+1}}{15} (3(x+1)^2 - 5(x+1)) = \frac{2\sqrt{x+1}(3x^2+x-2)}{15} + C$,
- c) $\int_0^1 x \ln(1+x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln t dt = \frac{1}{2} [t \cdot \ln t]_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 t \frac{1}{t} dt =$
 $\frac{1}{2} (2 \ln 2 - 2 + 1) = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Lösning till problem 4.

Implicit derivering ger: $y^3 + 3xy^2 \cdot y' + 2xy + x^2y' = 0$.

I punkten $(2, 1)$ får vi: $1^3 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot y' + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 4y' = 0$

$\Leftrightarrow 10y' = -5 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}$. Tangentens ekvation i punkten $(2, 1)$ är $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Leftrightarrow$
 $x + 2y - 4 = 0$.

Lösning till problem 5.

- a) $\int_{-2}^2 |x^2 - 1| dx = \int_{-2}^{-1} |x^2 - 1| dx + \int_{-1}^1 |x^2 - 1| dx + \int_1^2 |x^2 - 1| dx =$
 $\int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^2 (x^2 - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} + \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 =$
 $-\frac{1}{3} + 1 + \frac{8}{3} - 2 + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + 1 = 4$,

b) Om $f(x) = (\sin x)^x$ då $\ln(f(x)) = \ln((\sin x)^x) = x \ln \sin x$ och

$$\frac{d}{dx}(\ln f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 1 \cdot \ln \sin x + x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \ln(\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x},$$

alltså $f'(x) = f(x) \cdot \left(\ln(\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x} \right) = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + \frac{x \cos x}{\sin x} \right).$

Lösning till problem 6.

Om ena sidan av den inskrivna rektangeln är $2t$ då andra sidan är $2\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$ och arean av rektangeln är $A(t) = 4t\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}$, där $0 \leq t \leq 2$. Arealen antar sitt största värde antingen för $t = 0$ eller $t = 2$ eller där $A'(t) = 0$. $A(0) = A(2) = 0$, alltså minsta värdet för arean.

$$A'(t) = 4 \left(\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}} - \frac{t \cdot \frac{2t}{4}}{2\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}} \right) = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{4}}} \left(1 - \frac{t^2}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}.$$

$$A(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{2}{4}} = 4 \text{ a.e.}$$

Lösning till problem 7.

$$\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)} \Leftrightarrow A=1, B=-1 \text{ och } C=2, \text{ alltså}$$

$$\frac{2x+1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2+1}.$$

$$\int \frac{2x+1}{x(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x-2}{x^2+1} \right) dx = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctan x + C.$$

Lösning till problem 8.

$y' - x^2 y = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = x^2 \Leftrightarrow \int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln|y| = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow |y| = Ae^{\frac{x^3}{3}}$. Om lösningen går genom punkten $(0, 1)$ då $1 = Ae^0 \Rightarrow A = 1$. I en omgivning av punkten $(0, 1)$ är $y > 0$, alltså den sökta lösningen är $y = e^{\frac{x^3}{3}}$.