

Skrivtid: 9.00–14.00. Hjälpmedel: Skrivdon, Gula formelsamling. Varje problem ger högst 5 poäng. Lösningarna skall vara åtföljda av förklarande text. För betygen 3, 4, 5 krävs 18, 25, respektive 32 poäng.

1. a) Beräkna:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + e^{2x}}{2e^{2x} - x^3},$$

- b) Bestäm konstanten a så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a(x^2 - 1)}{\ln x} & \text{för } x \neq 1 \\ 2 & \text{för } x = 1 \end{cases}$$

blir kontinuerlig för alla $x > 0$.

2. Låt $f(x) = x \arctan x$. Bestäm:

a) $f'(x)$ och b) $\int f(x) dx$.

3. Visa att $\arccos \frac{1}{x} = \arctan \sqrt{x^2 - 1}$ för alla $x > 1$.

4. a) Visa med hjälp av variabelsubstitutionen $t = e^x$ att den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1}$ övergår i $\int_1^\infty \frac{dt}{t(t+1)}$.

b) Bestäm konstanterna A och B så att $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}$.

c) Bestäm värdet av den generaliserade integralen $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1}$, om det existerar.

5. Ange alla asymptoter till funktionen $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2}$.

Bestäm även grafens läge i förhållande till asymptoterna.

6. Låt $f(x) = \ln x^2 - \sqrt{2x}$.

a) Bestäm alla stationära punkter till funktionen $f(x)$.

b) Bestäm funktionens största och minsta värde (om de existerar).
Motivera svaren ordentligt.

Var god vänd.

7. Det område som ligger mellan x -axeln och kurvan $y = x\sqrt{3-x}$ roterar kring x -axeln. Beräkna volymen av den uppkomna rotationskroppen.
8. a) Bestäm den allmänna lösningen till differentialekvationen:
- $$\frac{dy}{dt} = 1 - y, \quad \text{där } y > 1.$$
- b) Lös begynnelseproblemet:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 1 - y \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

1. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + e^{2x}}{2e^{2x} - x^3} = \frac{1}{2}$, b) $a = 1$.
2. a) $f'(x) = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$, b) $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$.
3. Beräkna derivator för bägge sidor och sätt in $x = 2$.
4. b) $A = 1$ och $B = -1$. c) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1} = \ln 2$.
5. Vågrät asymptot $y = 1$ och lodrät asymptot $x = -1$.
6. a) Funktionen har en stationär punkt $x = 8$.
b) Funktionen antar sitt största värde $f(8) = 6 \ln 2 - 4 \approx 0.159$.
Funktionen antar inte sitt minsta värde.
7. $V = \frac{27}{4}\pi$ v.e.
8. a) $y(t) = Ae^{-t} + 1$. b) $y_p(t) = e^{-t} + 1$.

Lösning till problem 1.

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + e^{2x}}{2e^{2x} - x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x}(\frac{x^3}{e^{2x}} + 1)}{e^{2x}(2 - \frac{x^3}{e^{2x}})} = \frac{0 + 1}{2 - 0} = \frac{1}{2}$, ty $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^{2x}} = 0$,
- b) Bestäm först $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x^2 - 1)}{\ln x}$. Sätt $x - 1 = t$. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x^2 - 1)}{\ln x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a((t+1)^2 - 1)}{\ln(t+1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a(t(t+2))}{\ln(t+1)} = a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t+1)} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} (t+2) = a \cdot 1 \cdot 2 = 2a$. Funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i $x = 1 \Leftrightarrow 2a = 2$ dvs. om $a = 1$. För övriga $x > 0$ funktionen är kontinuerlig som en elementär funktion.

Lösning till problem 2.

- a) $f'(x) = (x \arctan x)' = \arctan x + x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$,
- b) $\int f(x) dx = \int x \arctan x dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1 - 1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2}(x - \arctan x) + C$.

Lösning till problem 3.

- $(\arccos \frac{1}{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{1}{x})^2}} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
- $(\arctan \sqrt{x^2-1})' = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2-1})^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.
- Derivatorna är lika alltså funktionerna skilljes högst med en konstant, dvs.
- $\arccos \frac{1}{x} = \arctan \sqrt{x^2-1} + C$. Sätt in $x = 2$. Man får
- $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = \arctan \sqrt{3} + C = \frac{\pi}{3} + C \Rightarrow C = 0$, alltså $\arccos \frac{1}{x} = \arctan \sqrt{x^2-1}$.

Lösning till problem 4.

- a) Variabelsubstitutionen $t = e^x$ ger $dt = e^x dx$ eller $dx = \frac{dt}{t}$ och därför
- $$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1} = \int_1^\infty \frac{dt}{t(t+1)}.$$
- b) $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \Leftrightarrow \frac{A(t+1) + Bt}{t(t+1)} = \frac{1}{t(t+1)} \Leftrightarrow (A+B)t + A = 1 \Leftrightarrow A+B=0$
och $A=1$ dvs. $B=-1$. $\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$.
- c) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 1} = \int_1^\infty \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_1^T \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln T - \ln(T+1)) = \lim_{T \rightarrow \infty} (\ln T - \ln(T+1) + \ln 2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \ln \frac{T}{T+1} + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2$.

Lösning till problem 5.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 2x}{x^2 + 2x + 1} = 1 - \frac{2x}{(x + 1)^2}. \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{2x}{(x + 1)^2}\right) = 1.$$

Linjen $y = 1$ är en vågrät asymptot. För alla $x > 0$ gäller att $f(x) < 1$, alltså för stora x ligger funktionens graf under linjen $y = 1$. För $x < 0$ gäller att $f(x) > 1$ och därför för negativa x grafen ligger ovanför linjen $y = 1$. Funktionen $f(x)$ är inte definierad i $x = -1$ och $\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} = +\infty$ och $\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^2} = +\infty$ och därför linjen $x = -1$ är en lodrät asymptot till funktionsgrafen.

Lösning till problem 6.

a) Funktionen $f(x) = \ln x^2 - \sqrt{2x}$ är definierad och deriverbar för alla $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{x}}{\sqrt{2x}}.$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 8$. Funktionen $f(x)$ har bara en stationär punkt $x = 8$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (\ln x^2 - \sqrt{2x}) = -\infty$, alltså funktionen antar inte minsta värdet.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x^2 - \sqrt{2x}) = -\infty$, ty funktionen $\sqrt{2x} = \sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}}$ växer snabbare än $\ln x^2$. Funktionen $f(x) = \ln x^2 - \sqrt{2x}$ antar, alltså största värdet i en stationär punkt, dvs. i punkten $x = 8$. Detta värde är $f(8) = \ln 64 - \sqrt{16} = 6 \ln 2 - 4 \approx 0.159$.

Lösning till problem 7.

Kurvan $y = x\sqrt{3-x}$ ligger ovanför x -axeln för $0 \leq x \leq 3$. Volymen av den uppkomna kroppen ges av: $V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^3 x^2(3-x) dx = \pi \left[x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \pi \left(27 - \frac{81}{4} \right) = \frac{27}{4}\pi$ v.e.

Lösning till problem 8.

a) Ekvationen är separabel. $\frac{dy}{dt} = 1 - y \Leftrightarrow \frac{1}{1-y} \cdot \frac{dy}{dt} = 1 \Leftrightarrow \int \frac{1}{1-y} dy = \int 1 dt \Leftrightarrow -\ln(y-1) = t + C \Leftrightarrow y-1 = -t - C \Leftrightarrow y = Ae^{-t} + 1$, där $A = e^{-C}$ är en konstant.

b) För $t = 0$ $y = 2 \Leftrightarrow 2 = A + 1 \Leftrightarrow A = 1$, alltså, den sökta lösningen till begynnelseproblemmet är $y_p(t) = e^{-t} + 1$.