UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen

Datorövningar i DERIVE för kursen Envariabelanalys IP 1

Exempel 1

I vilken punkt på kurvan $y = \dfrac{2x^3 - 9x^2 - 5x + 4}{2x + 1}$ är tangenten parallell med linjen $2y+5x = 0$? Rita kurva och tangent.

Lösning med hjälp av **Derive**

Skriv in den givna funktionen i **Derive** (välj "pennan"). På skärmen erhålls

$$\#1 \qquad y = \frac{2x^3 - 9x^2 - 5x + 4}{2x + 1}$$

Linjen $2y + 5x = 0$ har riktningskoefficienten $-\dfrac{5}{2}$. Vi söker en tangent som är parallell med denna linje. Detta innebär att tangentens riktningskoefficient också är $-\dfrac{5}{2}$. Detta innebär i sin tur att vi söker en punkt på kurvan där derivatans värde är $-\dfrac{5}{2}$.
Vi låter **Derive** derivera funktionen:
Markera högerledet i formeln #1 genom att klicka med musen.
Välj deriveringssymbolen ∂ i Vertygsfältet.
I den inmatningsruta som dyker upp är det markerade uttrycket inskrivet, som deriveringsvariabel är x markerad och derivata av ordning 1 är markerad. Eftersom allt detta stämmer kan man direkt trycka på OK eller **S**implify. (Om man trycker på OK får man följande bekräftelse på att **Derive** har uppfattat vad som ska göras: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{2x^3 - 9x^2 - 5x + 4}{2x + 1}\right)$. För att få deriveringen utförd väljer man sedan förenkling genom att trycka på "=" i Vertygsfältet.)
På skärmen får vi

$$\#2 \qquad \frac{8x^3 - 12x^2 - 18x - 13}{(2x + 1)^2}$$

Vi bildar nu en ekvation genom att sätta uttryck $= -\dfrac{5}{2}$.
Se till att uttrycket i #2 är markerat, välj Inmatning ("pennan"), kopiera det markerade uttrycket till inmatningsraden med $< F3 >$, skriv $= -\dfrac{5}{2}$. Tryck på OK. På skärmen erhålls ekvationen

$$\#3 \qquad \frac{8x^3 - 12x^2 - 18x - 13}{(2x + 1)^2} = -\frac{5}{2}$$

Detta är en tredjegradsekvation som vi låter **Derive** lösa.
Se till att ekvationen i #3 är markerad, välj So**l**ve-**A**lgebraically eller klicka på "förstoringsglaset i Vertygsfältet, kontrollera att ifylld variabel stämmer och välj **S**implify. (Om man väljär OK får man i nästa steg välja förenkling med "="). Vi får

$$\#4 \qquad \left[x = \frac{3}{2},\ x = -\frac{5}{8} + \frac{i\sqrt{31}}{8},\ x = -\frac{5}{8} - \frac{i\sqrt{31}}{8}\right]$$

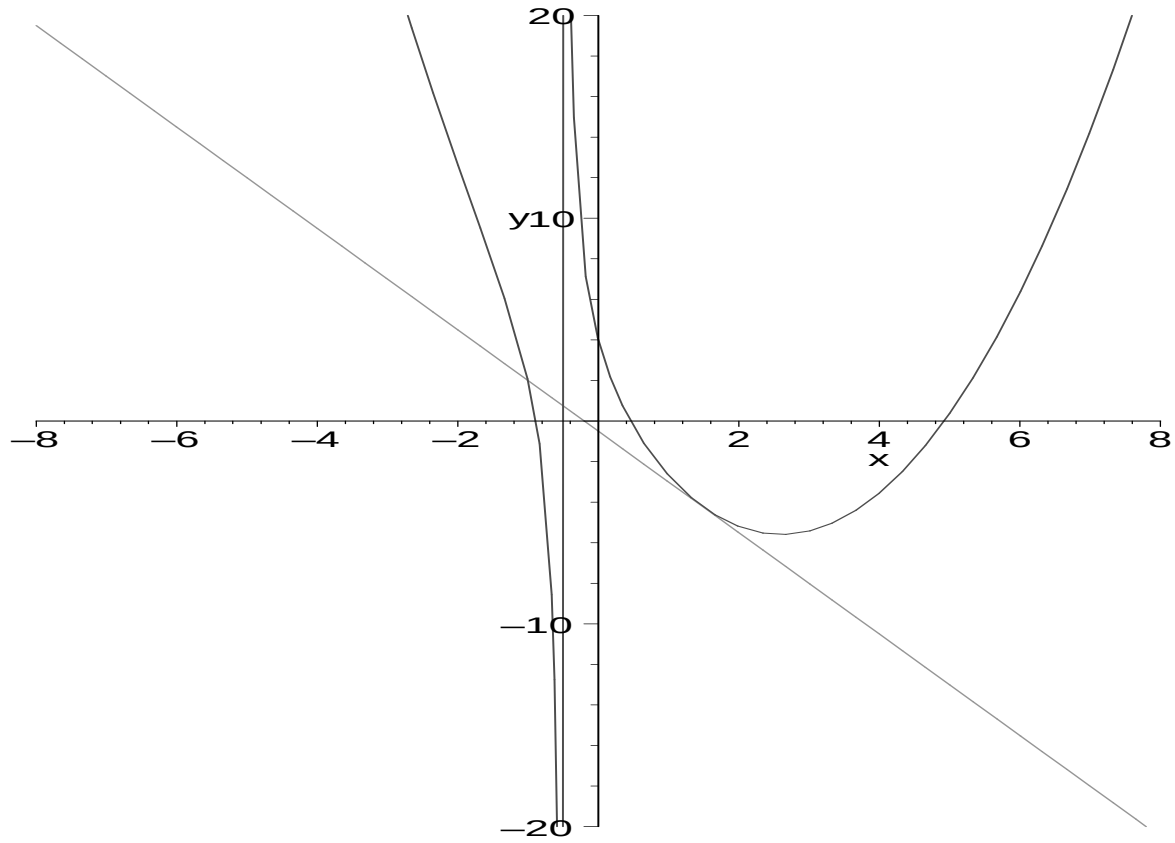
Vi får 3 rötter till tredjegradsekvationen, men bara en av rötterna är reell och aktuell i vårt fall.
Vi vet nu tengeringspunktens $x-$koordinat, $x = \frac{3}{2}$. För att bestämma $y-$koordinaten sätter vi in $x = \frac{3}{2}$ i kurvans ekvation på följande sätt:
Markera uttrycket #1, välj "Sub" i Vertygsfältet, ange i inmatningsrutan att x ska ersättas med $\frac{3}{2}$ och tryck på **S**implify. Vi får

#5 $\quad y = -\frac{17}{4}$

Vi vet nu att tangenten är en linje som går genom $(\frac{3}{2}, -\frac{17}{4})$ och har riktningskoefficienten $-\frac{5}{2}$. Vi skriver in dess ekvation (enpunktsformen) och får

#6 $\quad y + \frac{17}{4} = -\frac{5}{2}(x - \frac{3}{2})$

Nu återstår det bara att rita kurva och tangent och på det sättet kontrollera att lösningen stämmer. Gör så här:
Markera #1 och klicka på symbolen för 2-dim koordinatsystem i Vertygsfältet (näst längst till höger). Välj gärna **W**indow - Tile **V**ertically för att dela skärmen i en grafisk och en algebraisk halva. Gå till det grafiska fönstret och välj **P**lot. Den markerade funktionen ritas upp. Skalan kan behöva ändras, gör det med hjälp av knapparna för zoomning. Gå till det algebraiska fönstret, markera tangentens ekvation (#6), gå tillbaka till det grafiska fönstret och välj **P**lot. Du får en figur av följande slag:



Vi ser att tangenten skär kurvan i en punkt i andra kvadranten. Om vi vill beräkna koordinaterna för denna punkt kan vi göra så här:
Lös ut y ur tangentens ekvation. Det gör man genom att markera denna ekvation (#6), välja So**l**ve **("förstorningsglas"), ange att den variabel som ska lösas är y och trycka på S**implify. **Vi får**

#7 $y = -\dfrac{5x+1}{2}$

Sedan bildar vi en ekvation genom att sätta högerledet här lika med högerledet i #1.
Markera högerledet i #7, välj inmatning ("pennan"), kopiera det markerade uttrycket till inmatningsraden med $< F3 >$, skriv $=$, markera högerledet i #1, ställ markören på inmatningsraden och kopiera dit uttrycket med $< F3 >$. Vi får

#8 $\dfrac{5x+1}{2} = \dfrac{2x^3 - 9x^2 - 5x + 4}{2x+1}$

Lös ekvationen med Derive på samma sätt som förut. Vi får

#9 $\left[x = \dfrac{3}{2},\ x = -1\right]$

Den ena roten är tangeringspunkten, den andra ger att $x-$koordinaten för den punkt vi sökte är -1.

Övningsuppgifter

1. **a) Rita kurvan $y = \dfrac{21x+20}{x^2+1}$. Välj lämplig skala så att kurvans lokala extremvärden kommer med.**
   b) Avläs närmevärden för koordinaterna för de lokala extrempunkterna.
   c) Beräkna de exakta värdena för dessa koordinater (med hjälp av derivata).
2. **Funktionen $f(x) = 22ax^3 - 9a^3x^2 - 12a^2x + 228x$ har ett maximivärde för $x = 2$. Bestäm a. Kontrollera resultatet genom att rita grafen.**
3. **Bestäm a så att kurvan $y = a^3(2x-1)^3 + a^2(x-2)^2 - 6(3a-2)x$ får en lokal maximipunkt på $y-$axeln.**
4. **Bestäm värdemängden till funktionen $y = x(9x^3+16x^2+18x+48)$. Exakt svar krävs.**
5. **a) Finns det något heltalsvärde a så att linjen $y = a$ skär kurvan $y = x(63x^3 - 142x^2 - 156x + 576)$ i 4 olika punkter?**
   b) För vilka värden på a saknas skärningspunkter? Svara exakt.
6. **Funktionen f definieras genom $f(x) = \dfrac{4x^2+3x+2}{x^3+x-2}$. För vilka värden på konstanten a har ekvationen $f(x) = a$ mer än en reell rot?**
7. **Bestäm konstanterna a, b och c så att kurvan $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ får följande egenskaper:**
   - kurvan har en lokal minimipunkt i $(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{5}{2})$,

- **tangenten i den punkt där kurvan skär $y-$axeln går genom punkten $(1, 8)$.**

8. Bestäm en polynomfunktion f med heltalskoefficienter av lägsta möjliga gradtal med följande egenskaper:
- **f har ett lokalt maximum för $x = -3$,**
- **f har en terrasspunkt för $x = 2$,**
- **$f(1) = 0$.**

9. a) Använd Derive för att bestämma följande primitiva funktioner:

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx$ **(2)** $\displaystyle\int \sin^2 x\,dx$ **(3)** $\displaystyle\int x \ln x\,dx$

Kontrollera resultatet genom att derivera de erhållna funktionerna (för hand eller med Derive).

b) Ange vilken metod som kan användas för att beräkna dessa primitiva funktioner för hand.

10. Derivera följande funktioner:

(1) xe^{2x} **(2)** $\dfrac{x}{x+1}$ **(3)** $\sin^2 x + 2\cos^2 x$.

Integrera sedan de funktioner som erhålls. Då förväntar man sig återfå den ursprungliga funktionen. Detta sker för funktionen i (1) men inte i (2) och (3). Förklara varför.

11. Kurvorna $y = x^3 - 5x$ och $y = 2x^2 - 6$ avgränsar tillsammans två områden. Beräkna arean av vart och ett av dessa områden.

12. Ett område i första kvadranten begränsas av $y = 4x$, $y = \dfrac{4}{x}$, $y = \ln x$, $x = 2$ samt $x-$axeln.

a) Bestäm områdets area.

b) Bestäm volymen av den kropp som bildas när området roterar kring $y-$axeln. Lös uppgiften både med metoden med cirkulära skivor (skivmetoden) och med metoden med cylindriska skal (rörmetoden).