UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
P. Winkler
018-4713289

LÖSNINGAR till DUGGA nr. 2
ENVARIABELANALYS IP 1
BI och MI
2006-11-29

1. a) Definiera $f(2)$ så att funktionen $f(x) = \dfrac{\ln(3-x)}{x^2-4}$ blir kontinuerlig i punkten $x_0 = 2$.

b) Funktionen $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{2x^2-8}$. Bestäm alla vågräta och lodräta asymptoter för $f(x)$.

Lösning till uppg. 1:

a) $f(2) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\ln(3-x)}{(x-2)(x+2)} = \left\{ \begin{array}{ccc} t & = & x-2 \\ x & = & t+2 \\ x\to 2 & \Leftrightarrow & t\to 0 \end{array} \right\} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(3-(t+2))}{t(t+4)} =$
$\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+(-t))}{-(-t)(t+4)} = -\dfrac{1}{4}$.

$f(2)$ måste vara lika med $-\dfrac{1}{4}$ för att funktionen ska vara kontinuerlig i punkten $x_0 = 2$.

b) Vågrätta asymptoter.
Linjen $y = g$ är en vågrätt asymptot $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = g$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{3x^2-1}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2(3-\frac{1}{x^2})}{x^2(2-\frac{8}{x^2})} = \dfrac{3}{2}$.
Linjen $y = \dfrac{3}{2}$ är en vågrätt asymptot för funktionen.
Lodrätta asymptoter.
Linjen $x = x_0$ är en lodrätt asymptot $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x) = \pm\infty$.
$\lim\limits_{x\to -2\pm} \dfrac{3x^2-1}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to -2\pm} \dfrac{3x^2-1}{2(x+2)(x-2)} = \mp\infty$ och
$\lim\limits_{x\to 2\pm} \dfrac{3x^2-1}{2x^2-8} = \lim\limits_{x\to 2\pm} \dfrac{3x^2-1}{2(x+2)(x-2)} = \pm\infty$, alltså linjenra $x = -2$ och $x = 2$ är två lodrätta asymptoter för funktionen.

2. Beräkna $f'(x)$ då:

a) $f(x) = \sqrt{3x-(x-2)^3}$, b) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x^3-4}$,

c) $f(x) = \ln(\arcsin(3x^2+1))$, d) $f(x) = (x^2)^{2x}$.

Lösning till uppg. 2:

a) $f'(x) = (\sqrt{3x-(x-2)^3})' = \dfrac{1}{2\sqrt{3x-(x-2)^3}} \cdot (3-3(x-2)^2) = \dfrac{3}{2} \dfrac{4x-x^2-3}{\sqrt{3x-(x-2)^3}}$,

b) $f'(x) = \left(\dfrac{3x^2}{x^3-4}\right)' = 3\dfrac{2x(x^3-4) - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-4)^2} = -3x\dfrac{x^3+8}{(x^3-4)^2}$,

c) OBS!!! Definitionsmängd för funktionen $\arcsin(3x^2+1)$ är mängden av alla x s.a. $-1 \leq 3x^2+1 \leq 1$, alltså $D_{\arcsin(3x^2+1)} = \{0\}$, alltså $D_f = \{0\}$. Derivatan för $f(x)$ existerar inte, ty funktionen är definierad i en enda punkt.

d) $f(x) = (x^2)^{2x} = x^{4x}$. $\ln f(x) = 4x\ln x$, alltså $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 4\ln x + 4x\dfrac{1}{x} = 4\ln x + 4$, alltså $f'(x) = f(x) \cdot (4\ln x + 4) = 4x^{4x}(\ln x + 1)$.