UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
P. Winkler
018-4713289

ÖVNINGSDUGGA - Lösningar
ENVARIABELANALYS IP 1
BI och MI
2006-11-27

1. a) Låt $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} - |x-1| & \text{då} \quad |x| > 2 \\ ax+b & \text{då} \quad |x| \leq 2\,. \end{cases}$

Bestäm konstanterna a och b så att f blir kontinuerlig.

b) Definiera $f(0)$ så att funktionen $\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1-2x)}$ blir kontinuerlig på hela reella linjen.

c) Bestäm alla vågrätta och lodrätta asymptoter till funktionen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}$.

d) Bestäm alla vågrätta och lodrätta asymptoter för funktionen $f(x) = \dfrac{2x-5}{|x+2|}$.

Lösning till uppg. 1:

a) Funktionen blir kontinuerlig om $f(x)$ blir kontinuerlig i $x=2$ och $x=-2$.
$\lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \sqrt{x^2-4} - |x-1| = \lim\limits_{x\to 2+} \sqrt{x^2-4} - x + 1 = -1$
$\lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} ax+b = 2a+b = f(2)$.
Funktionen är kontinuerlig i $x=2 \Leftrightarrow 2a+b=-1$.
P.s.s. Funktionen blir kontinuerlig i $x=-2$ om
$\lim\limits_{x\to -2-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-} \sqrt{x^2-4} - |x-1| = \lim\limits_{x\to -2-} \sqrt{x^2-4} - 1 + x = -3$
$\lim\limits_{x\to -2+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2+} ax+b = -2a+b = f(-2)$.
Funktionen är kontinuerlig i $x=-2 \Leftrightarrow -2a+b=-3$.
Alltså konstanterna a och b ska väljas s.a. $\begin{cases} 2a+b &= -1 \\ -2a+b &= -3 \end{cases}$
dvs. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} - |x-1| & \text{då} \quad |x| > 2 \\ ax+b & \text{då} \quad |x| \leq 2\,. \end{cases}$ $b=-2$ och $a=\dfrac{1}{2}$.
Funktionen $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-4} - |x-1| & \text{då} \quad |x| > 2 \\ \dfrac{1}{2}x - 2 & \text{då} \quad |x| \leq 2\,. \end{cases}$ är en kontinuerlig funktion för alla x.

b) För att $f(x)$ ska vara kontinuerlig för alla x måste den vara kontinuerlig för $x_0 = 0$.
I alla andra punkter, där $x_0 \neq 0$ gäller att $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{\ln(1-2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{3(e^{3x}-1)}{3x} \cdot \frac{-2x}{-2\ln(1-2x)} = -\frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{\ln(1-2x)} =$$
$-\dfrac{3}{2} \cdot 1 \cdot 1 = -\dfrac{3}{2}$, alltså $f(0) = -\dfrac{3}{2}$ om $f(x)$ ska vara kontinuerlig för alla reella x.

c) Linjen $y=y_0$ är en vågrätt asymptot $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=y_0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{\sqrt{x^2-2x}+x}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{-2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1}{-2}=-1\,.$$

Linjen $y=-1$ är en vågrätt asymptot för funktionen.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}=\left\{\begin{array}{c} x=-t \\ x\to-\infty\Leftrightarrow t\to+\infty\end{array}\right\}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t^2+2t}+t}=0\,,$$

alltså även linjen $y=0$ är en vågrätt asymptot.

Linjen $x=x_0$ är en lodrätt asymptot för funktionen $f(x)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0\pm} f(x)=\pm\infty$.

Funktionen $f(x)$ är odefinierad endast då $x=0$, alltså endast $x=0$ kan vara en lodrätt asymptot.

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}=-\infty \text{ och } \lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}-x}=+\infty.$$

Linjen $x=0$ är en lodrätt asymptot för funktionen $f(x)$.

d) Linjerna $y=2$ och $y=-2$ är två vågrätta asymptoter, ty $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ och $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$.

Linjen $x=-2$ är den lodrätta asymptoten, ty $\lim\limits_{x\to-2-} f(x)=\lim\limits_{x\to-2+} f(x)=-\infty$.

2. Beräkna $f'(x)$ då:

a) $f(x)=\left(1+\sqrt{\dfrac{x-2}{3}}\right)^4$, b) $f(x)=\dfrac{x^5\ln(3+x^6)}{\sqrt{4+x^2}}$,

c) $f(x)=\arcsin(1-x^2)$, d) $f(x)=(\sin x)^{\cos x}$.

Lösning till uppg. 2:

a) $$f'(x)=\left(\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^4\right)'=4\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-2}{3}}}\cdot\frac{1}{3}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\sqrt{\frac{x-2}{3}}\right)^3\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}}\,,$$

b) Använd kvotregel:

$$f'(x)=\left(\frac{x^5\ln(3+x^6)}{\sqrt{4+x^2}}\right)'=\frac{\left(5x^4\ln(3+x^6)+x^5\dfrac{6x^5}{3+x^6}\right)\sqrt{4+x^2}-x^5\ln(3+x^6)\dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}}{4+x^2}\,,$$

c) $$f'(x)=(\arcsin(1-x^2))'=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\cdot(-2x)=-\frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}\,,$$

d) Använd logaritmisk derivering. $\ln f(x) = \ln(\sin x)^{\cos x} = (\cos x)\ln(\sin x)$, alltså
$\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (-\sin x)\ln(\sin x) + \cos x \cdot \dfrac{\cos x}{\sin x} = (-\sin x)\ln(\sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$, alltså
$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot \left(-\sin x \ln(\sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}\right)$.