

Studieanvisningar till kapitel 10

Läs igenom TEXTEN NOGGRANT och studera alla exempel.

I dessa studieanvisningar har vi valt ut de moment som är EXTRA VIKTIGA.

Till kapitel 10 har vi avsatt 4 lektionspass (8 timmar).

Avsnitt 10.1

I EXEMPLEN 10.1, 10.2 och 10.3 är $f(x)$ **en tänkbar** lösning; det kan alltså finnas fler lösningar. DEFINITIONEN av en **primitiv funktion** är mycket VIKTIG! Satserna 10.1 10.2 och 10.3 är grundläggande för behandlingen av primitiva funktioner. I tredje raden på sid 294 betyder DC derivatan av konstanten C (ej Davis Cup).

Observera att med $\int f(x) dx$ menar man *samtliga* primitiva funktioner till $f(x)$.

Alltså om $F(x)$ är en primitiv funktion så är $\int f(x) dx = F(x) + C$.

EXTRA UPPGIFT: Vad är $\int 2x dx - \int 2x dx$?

VIKTIGT att känna igen begreppen: **obestämd integral**, **integrand**, **integrationsvariabel**, och **integrationskonstant**.

Viktigt att känna igen formlerna för STANDARDINTEGRALER på sid 296 och kunna koppla ihop dem med STANDARDDERIVATOR (**Appendix C**). Verifiera standardintegralerna genom att derivera högerleden.

Mycket användbara räknelagar för integraler har vi i sats 10.4.

STUDERA alla exempel. Observera att

$$\int f'(x) dx = f(x) + C.$$

Sats 10.5 ger oss möjligheten att **integrera** sammansatta funktioner, där **inre** derivatan är **konstant**. Bestäm inre derivatan i exempel 10.10 d - f.

Observera de två sista meningarna före exempel 10.9 (VIKTIGT!). Stryk under **tredje** ordet i sista meningen.

Exempel 10.10 c) är en bra trigonometrisk övning.

Lös testproblem 1 och 2.

Avsnitt 10.2

Koppla ihop formeln för PARTIELL INTEGRATION med PRODUKTREGELN för derivatan. Sats 10.6 på sid 300 är VIKTIG!

Studera EXEMPLEN, speciellt noga exempel 10.14. I detta exempel använder man en ofta användbar omskrivning av integranden som en produkt.

Räkna testproblem 3. Tänk på lämpligt val av funktionerna $f(x)$ och $g(x)$. Vad får man om i 3 a) väljer man $f(x) = x$ och $g(x) = e^{-x}$?

Avsnitt 10.3

Studera alla likheter i SATS 10.7. Observera att satsen används om integranden är av formen $f(g(x)) \cdot g'(x)$, dvs det handlar om en sammansatt funktion och dess inre derivata.

Från exemplen får ni metoden. Det är därför viktigt att studera alla exemplen. För att kunna integrera behövs det YTTTERLIGARE TRÄNING.

Exempel 10.25 och testproblem 10.4 d kan betrakas som ganska svåra. Dessutom saknas lösningen då $\cos t = -\sqrt{1 - \sin^2 t}$. Tänk på intervallet för t ! Lös testproblem 4.

Avsnitt 10.4

Målet för avsnittet är att presentera en del metoder som används för att integrera (beräkna primitiv funktion) en **rationell funktion**, dvs. en funktion som är **kvoten** mellan två **polynom**. Metoden går ut på att om täljaren har gradtal som är större än eller lika med nämnarens gradtal så utför man först, en polynomdivision för att sedan separat kunna integrera kvoten och resten.

Studera i exemplen hur man omformar sådana integrander. Studera bara de utvalda EXEMPLEN: 10.27, 10.28, 10.29, 10.30, 10.31, 10.32, 10.36, 10.37, 10.39, 10.40.

Räkna testproblem 5 och 6.

LMPLIGA VNINGAR: 10.1, 10.2, 10.3 b, c, e, 10.4 c, e, f, h, l, 10.5 c, d, e, f, Lös 10.5 h men byt $4 - x^4$ mot $1 - x^4$, 10.6 a, c, 10.8 a, b, 10.9.

10.4 INTEGRALER AV RATIONELLA FUNKTIONER

A) Täljaren har samma eller högre gradtal än nämnaren

Utför polynomdivision eller andra algebraiska manipulationer för att åstadkomma en kvot (ett **polynom**) plus en **rest** (som går att integrera enligt **B**). Jfr ex 30 och 31 i kursboken.

B) Täljaren (T) är av lägre grad än nämnaren (N).

* Nämnaren är av första graden:

$$\text{Ex 1. } \int \frac{a}{1+bx} dx = \frac{a \ln |1+bx|}{b} + C,$$

** N är av högre grad än 1;

Frågeställning: **Är T en derivata till N?** Om **Ja**

$$\text{Ex 2. } \int \frac{12x^3 + 14x - 8}{3x^4 + 7x^2 - 8x + 12} dx = \ln |3x^4 + 7x^2 - 8x + 12| + C,$$

Om **Nej**

I. N är av andra graden och N=0 ger komplex lösning

$$1) \text{ Ex 3. } \int \frac{5}{x^2 + 6x + 10} dx$$

Sätt **N=0**
 $x^2 + 6x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \pm \sqrt{9-10} \Rightarrow \text{Reell lösning saknas.}$

Kvadratkomplettera

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 - 9 + 10 = (x+3)^2 + 1.$$

$$\int \frac{5}{x^2 + 6x + 10} dx = \int \frac{5}{1 + (x+3)^2} dx = 5 \arctan(x+3) + C.$$

$$2) \text{ Ex 4. } \int \frac{2x+10}{x^2+6x+10} dx = \int \frac{2x+6}{x^2+6x+10} dx + \int \frac{4}{x^2+6x+10} dx = I_1 + I_2 + C$$

$I_1 = \ln |x^2 + 6x + 10| = \ln(x^2 + 6x + 10)$ Se Ex 2, och
 $I_2 = 4 \arctan(x+3)$ Se Ex 3.

$$\int \frac{2x+10}{x^2+6x+10} dx = \ln(x^2 + 6x + 10) + 4 \arctan(x+3) + C.$$

$$3) \text{ Ex 5. } \int \frac{5}{x^2 + 6x + 13} dx$$

N=0 ger $x^2 + 6x + 13 = 0 \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{9-13} \Rightarrow$ ekvationen saknar reell lösning.
 Jfr Ex 3. Efter kvadratkomplettering erhålls

$$\int \frac{5}{x^2 + 6x + 13} dx = \int \frac{5}{(x+3)^2 + 4} dx = \frac{5}{4} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+3}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{5}{4} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C = \frac{5}{2} \arctan\left(\frac{x+3}{2}\right) + C.$$

II. N är av andra graden och N=0 ger reell lösning

$$1) \text{ Ex 6. } \int \frac{3}{(x-2)^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x-2 \\ \frac{du}{dx} = 1 \\ du = 1 \cdot dx \end{array} \right] = \int \frac{3}{u^2} du = \int 3 \cdot u^{-2} du = -3u^{-1} + C = -\frac{3}{x-2} + C.$$

Alternativ lösning

$$\int \frac{3}{(x-2)^2} dx = \int 3(x-2)^{-2} dx = \frac{3(x-2)^{-1}}{-1} + C.$$

$$2) \text{ Ex 7. } \int \frac{3x}{(x-2)^2} dx = \left[\begin{array}{l} u = x-2 \\ \frac{du}{dx} = 1 \\ du = 1 \cdot dx \\ x = u+2 \end{array} \right] = \int \frac{3(u+2)}{u^2} du = \int \left(\frac{3u}{u^2} + \frac{6}{u^2} \right) du = \int \left(\frac{3}{u} + 6u^{-2} \right) du = 3 \ln |u| - 6u^{-1} + C = 3 \ln |x-2| - \frac{6}{x-2} + C.$$

$$3) \text{ Ex 8. } \int \frac{3x+5}{x^2-1} dx \quad \mathbf{N=0} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Partialbråksuppdelning

$$\frac{3x+5}{x^2-1} = \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x + (B-A)}{(x+1)(x-1)}$$

Bestämning av A och B kan ske på olika sätt; t.ex:

$$* \quad 3x+5 \equiv A(x-1) + B(x+1) \quad (\text{Välj lämpliga } x\text{-värden})$$

$$x=1 \Rightarrow 8 = 2B \Leftrightarrow B=4$$

$$x=-1 \Rightarrow 2 = -2A \Leftrightarrow A=-1$$

$$** \quad 3x+5 = (A+B)x + (B-A)$$

Identifiering av koefficienter ger

$$\begin{cases} 3 &= A+B \\ 5 &= B-A \end{cases} \quad \text{Ekvationssystemet ger } A=-1 \text{ och } B=4.$$

Integralen kan nu skrivas om och lösas:

$$\int \frac{3x+5}{x^2-1} dx = \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-1} \right) dx = -\ln|x+1| + 4\ln|x-1| + C.$$

Jfr ex 39 och 40 i kursboken.

III. N är av högre gradtal än 2.

Faktoruppdelning och partialbråksuppdelning.

Ex 9. $\int \frac{3x^2 + 7x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} dx \quad \mathbf{N=0} \Leftrightarrow x = -1.$

Partialbråksuppdelning

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 7x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{A(x^2 + 2x + 2) + (Bx + C)(x+1)}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} \\ &= \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + 2A+C}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)}. \end{aligned}$$

Identifiering ger $A + B = 3$, $2A + B + C = 7$ och $2A + C = 5$. Systemet har lösningen $A = 1$, $B = 2$ och $C = 3$.

$$\frac{3x^2 + 7x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x+3}{x^2 + 2x + 2}.$$

Alltså

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 7x + 5}{(x+1)(x^2 + 2x + 2)} dx &= \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{2x+3}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \ln|x+1| + \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2} dx + \int \frac{1}{1 + (x+1)^2} dx \\ &= \ln|x+1| + \ln(x^2 + 2x + 2) + \arctan(x+1) + C. \end{aligned}$$