UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

Studieanvisning 12
Envariabelanalys IP1
Ingenjörsprogrammen
Höstterminen 2001

Studieanvisningar till kapitel 12

I dessa studieanvisningar har vi valt ut de moment som är EXTRA VIKTIGA.

Till kapitel 12 har vi avsatt högst 3 lektionspass (6 timmar).

Avsnitt 12.1
Studera sats 12.1. Innehållet i satsen är MYCKET VIKTIGT! Observera såväl den geometriska som den fysikaliska tolkningen av satsen. Förklara för varandra vad man menar med att satsen är **en existenssats**.
Det går bra att hoppa över exempel 12.1 och testproblem 1.

Avsnitt 12.2
Observera att **högre derivator** definieras **rekursivt**, dvs derivatan av ordning 2 ($f''(x)$) definieras som derivatan av derivatan $f'(x)$ som kallas för första derivatan. Tredje derivatan är derivatan av andra derivatan, osv. Lägg märke till de olika beteckningar för högre derivator (spec. för derivator av ordning 2). Läs alla exempel.
Lös testproblem 2 och 3.

Avsnitt 12.3
En funktion $f(x)$ är **deriverbar** i punkten $x = x_0$ om $f'(x_0)$ existerar.
Studera sats 12.2, men lägg märke till att *en strängt växande* funktion i ett intervall kan sakna derivata eller ha derivatan lika med 0 i vissa punkter (samma gäller naturligtvis för strängt avtagande funktioner). Ge exempel på sådana funktioner genom att skissa grafer.
VIKTIGA BEGREPP: **maxpunkt**, **minpunkt**. Skilj mellan **största** värde och **maxvärde** samt mellan **minsta** värde och **minvärde** för en funktion.
Precis ovanför sats 12.3 står :"Vad gäller då för tangenten i max- och minpunkterna? På hörnet $x = g$ saknas den ju." De två följande meningarna ersätts av:
I ändpunkterna finns enbart höger- (i $x = a$) resp. vänstertangent (i $x = h$), som **kan** ha en riktningskoefficient $\neq 0$ (se fig 12.3 i punkten $(a, f(a))$.
Sats 12.3 är VIKTIG. Nya begrepp att hålla reda på är **extrempunkt**, **stationär punkt** och **terrasspunkt**.
Sammanfattningen på sid 358 (strax före EXEMPEL 12.9) är VIKTIG.
Studera användning av **teckenschema** vid bestämning av typen hos stationära punkter. Exemplen 12.9 och 12.10 kan generaliseras enligt nedan.

Om derivatan $f'(x)$ har olika tecken till höger och vänster om x_0 och $f(x)$ är kontinuerlig i $x = x_0$, så har funktionen $f(x)$ en extrempunkt i x_0.

Sats 12.4 säger att om i en stationär punkt gäller att $f''(x_0) \neq 0$ då kan vi avgöra typen hos punkten x_0. Om $f''(x_0) = 0$ kan man **INTE** dra någon slutsats. Försök förstå motiveringen för sats 12.4 som finns strax före satsen.
OBSERVERA att ibland är det enklare att göra teckenschema för $f'(x)$ än att

beräkna $f''(x)$. (Se testproblem 4 d.)
EXTRA UPPGIFT: Visa att funktionen $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ har minimipunkt då $x = 0$ men saknar derivata i punkten. Skissera funktionskurvan i en omgivning av $x = 0$.
Studera fig 12.7 i samband med exempel 12.11.
Ytterliggare tre nya begrepp: **inflexionspunkter**, **konkava** och **konvexa** funktioner. Se exempel 12.12 och 12.13.
Lös testproblem 4, 5 och 6.

Avsnitt 12.4
Studera EXEMPEL 12.14 **NOGGRANT**, där de tre första punkterna är de VIKTIGASTE. Observera att innan man börjar med funktionsundersökningen bör man bestämma STÖRSTA MÖJLIGA definitionsmängd. En värdetabell är till hjälp om man vill skissera grafen för funktionen.
I testproblem 7: Ange funktionernas definitionsmängder och genomför för övrigt undersökning enl. exempel 12.14. Bestäm även eventuella inflexionspunkter i 7 b.

Avsnitt 12.5
En funktions **största** resp. **minsta** värde finner man i någon av de tre fall som beskrivs i lösningen till exempel 12.15. Läs även exempel 12.16.
Lös testproblem 8 och 9.
LÄMPLIGA ÖVNINGAR: 12.1 a, b, d, e, f, g, 12.2 (motsvarande), 12.4 a, c,
12.5 c, d, 12.6, I uppgift 12.7 d ange funktionernas definitionsmängder och genomför för övrigt undersökning enligt exempel 12.14. Kan du geometriskt motivera existensen av en eller flera inflexionspunkter?
12.9, 12.12 (viktigt), 12.13 a, b, e, f, 12.14, 12.16, 12.19.
EXTRA UPPGIFT: Bestäm derivatan till funktionen $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.
Vilken slutsats kan ni dra om funktionen $f(x)$? Bestäm värdet för $f(x)$ för såväl positiva som negativa $x-$värden.