UPPSALA UNIVERSITET
MATEMATISKA INSTITUTIONEN

Studieanvisning 14
Envariabelanalys IP1
Ingenjörsprogrammen
Höstterminen 2001

Studieanvisningar till kapitel 14

Endast avsnitten 14.1 – 14.5 ingår i kursen. Läs igenom TEXTEN och studera EXEMPLEN.

Till kapitel 14 har vi avsatt 2 lektionspass (4 timmar).

Avsnitt 14.1
I detta avsnitt beskriver man vad som menas med en **differentialekvation**.
Lös testproblem 1, 2, 3.

AVSNITT 14.2
VIKTIGA BEGREPP: **partikulärlösning**, **allmän lösning** och **begynnelse-villkor**.
Lös testproblem 4 och 5. I testproblem 5: Bestäm även den partikulärlösningen för vilken begynnelsevillkoren: $y(0) = y'(0) = 0$ är uppfyllda.

Avsnitt 14.3
VIKTIGA BEGREPP: **ordinär** differentialekvaton, **linjär** differentialekvation av ordning n samt **separabel** ekvation.

Avsnitt 14.4
Studera **NOGGRANT** lösningsmetoder för en separabel ekvation. Lär dig inte några formler.
Observera att man ofta får lösningen till en separabel ekvation i **implicit** form.
Lös testproblem 7, 8.

Avsnitt 14.5
Det är viktigt att känna igen en **linjär** differentialekvation av ordning 1.
Man kan säga att en **linjär** differentialekvation av ordning 1 kan skrivas som $k(x) \cdot y'(x) + l(x) \cdot y(x) = m(x)$ där funktionerna $k(x)$, $l(x)$ och $m(x)$ är kända.
I de intervall där $k(x) \neq 0$ kan en sådan ekvation skrivas som (1) i kursboken på sid 410 genom att välja $g(x) = \dfrac{l(x)}{k(x)}$ och $h(x) = \dfrac{m(x)}{k(x)}$.
Studera exempel 14.12.
ETT MYCKET VIKTIGT BEGREPP: **integrerande faktorn** $e^{G(x)}$, där $G(x)$ är **en** primitiv funktion till $g(x)$ från (1) på sid 410.
Läs noggrant sista stycket framför exempel 14.13.
Glöm inte att multiplicera bägge leden i ekvationen med integrerande faktorn. Alltså även **högerledet** skall multipliceras med IF. Studera alla exempel i detta avsnitt .
Lös testproblem 9 och 10. Observera att vissa av linjära ekvationer av ordning 1 även är separabla (vilka?).

LÄMPLIGA ÖVNINGAR: 14.1 b, 14.3, 14.4, 14.5, 14.7, 14.8, 14.10, 14.11, 14.12, 14.14, 14.16, 14.18, 14.20, 14.22.

Några uppgifter

1. Man vet att sönderfallshastigheten för ett radioaktivt ämne är proportionell mot den totala mängden av kvarvarande radioaktiva ämnet. Proportionallitetskonstanten är specifikt för varje ämne.
Antag att vi vet att halveringstiden för ämnet är 10 år. Efter hur lång tid 100 g av ämnet reduceras till 10 g?

2. En infektionssjukdom antas sprida sig i en population med en hastighet som är proportionell mot såvel antalet infekterade som antalet oinfekterade individer. När man upptäckte smittan var en tredje del av populationen redan smittad. Spridningshastigheten var då så stor att om den förblev konstant, skulle hela populationen vara smittad efter 60 dagar. Hur stor del av befolkningen var faktiskt smittad efter 60 dagar?

3. Bästa drickstemperaturen för konjak är $29°C$ (då den som bekant smakar bäst). Konjaken serveras i rumstemperatur ($21°C$). Hur länge skall man hålla konjakskupan i händerna (kroppstemperaturen är som bekant $37°C$) innan konjaken är som bäst om efter 2 minuter konjakstemperaturen har stigit till $25°C$ och man vet att konjakens temperaturhöjning per tidsenhet är proportionell mot temperaturskillnaden mellan kroppstemperatur och konjakstemperatur ?

Översättningen till "**matematiska**"

1. Låt $y(t)$ beteckna mängden av det radioaktiva ämnet vid tiden t (räknat i år). Låt vidare $-k$ vara den specifika konstanten för ämnet. Vi vill bestäma t så att $y(t) = 10$ då vi vet att:

$$\begin{cases} y'(t) & = -k \cdot y(t) \\ y(0) & = 100 \\ y(10) & = 50\,. \end{cases}$$

2. Låt $y(t)$ vara andelen av populationen som är smittad efter tiden t dygn, räknad från upptäckten. Vi vill bestäma $y(60)$ då vi vet att:

$$\begin{cases} y'(t) & = k \cdot y(t) \cdot (1 - y(t)) \\ y(0) & = \frac{1}{3} \\ 60 \cdot y'(0) & = \frac{2}{3}\,, \end{cases}$$

där k är proportionallitetskonstant.

3. Låt $T(t)$ vara konjakens temperatur efter t minuter. Vi vill bestäma t så att $T(t) = 29$ då vi vet att:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} & = k(37 - T(t)) \\ T(0) & = 21 \\ T(2) & = 25\,, \end{cases}$$

där k är en konstant.