

Studieanvisningar till kapitel 9

I dessa studieanvisningar har vi valt ut de moment som är EXTRA VIKTIGA.

Till kapitel 9 har vi avsatt 4 lektionspass (8 timmar).

Avsnitt 9.1

Avsnittet handlar om **differenskvot** (ändringskvot), **derivata** kopplade till *sekanter* och **tangenter**. Olika beteckningar för derivatan av $y = f(x)$:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = Df(x).$$

VIKTIGT! Definition av derivatan, som finns inramat på sid 254. Observera att

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \text{ Se även avsnitt 9.3.}$$

Geometriskt tolkning av derivatan (sid 255). Obs: $f'(x_0)$ är lika med riktningskoefficient för tangentlinjen till grafen av $y = f(x)$ i punkten $(x_0, f(x_0))$. Observera ekvationen för tangenten (rutan på sid 255).

Räkna testproblem 1 a, c, 2 a, b, c och 3.

Avsnitt 9.2

Studera exemplen 9.5, 9.6 och 9.7. I dessa exempel beskrivs hur man i praktiken använder derivator, dvs hur man approximerar mer komplicerade funktioner med tangenter.

Räkna testproblem 4 b, c, 5 b, 6.

Avsnitt 9.3 och 9.4 Exempel 9.8 ger oss derivatan av funktionen $\sqrt{x}$.

Vad är för skillnad mellan **medelhastighet** och **momentan hastighet**? Andra uttryck som handlar om differenskvot och derivata är **marginalskatt** och **förändringshastighet**.

Lös testproblem 8 c.

Avsnitt 9.5

Kedjeregeln beskriver hur **derivatan** beräknas för en **sammansatt** funktion.

Du skall kunna **KEDJEREGELN** både i version 1 (sid 264) och i version 2 (sid 265). **Kedjeregeln** säger att

derivatan för en sammansatt funktion är lika med produkten av **derivatan** för **yttre** funktion och **derivatan** för **inre** funktion.

Studera alla EXEMPEL. Tänk efter på vad som är yttre och inre funktioner i alla dessa exempel.

Räkna alla testproblem. **GLÖM INTE INRE DERIVATAN !**

I testproblem 9 skall du beräkna $\frac{dy}{dt}$ dels genom att använda **kedjeregeln** dels genom direkt insättning av $x = x(t)$ i funktionen $y = y(x)$.

Avsnitt 9.6 och 9.7

Produktregeln och **kvotregeln** skall ni kunna utan att ni behöver slå upp dem i formelsamling. Lär er version två av de båda reglerna. Beskriv reglerna i ord. Studera EXEMPEL 9.13, 9.15 och 9.16. Räkna testproblem 12 och 14.

Avsnitt 9.8 och 9.9

Innehållet i avsnitt 9.8 och 9.9 är förmodligen välbekant från gymnasiet. Läs genom och fördjupa dig i det som verkar vara något nytt för dig.

I 9.9 behöver ni bara kunna derivator av sinus-, cosinus- och tangensfunktionerna. Räkna alla testproblem.

Avsnitt 9.10

Om man beskriver sambandet mellan x och y med hjälp av $y = f(x)$, säges att y som funktion av x är given **explicit**. Om så inte är fallet säges att y som funktion av x är given i **implicit** form. Studera EXEMPEL 9.20 och 9.21 och 9.22. OBSERVERA att i *Lösning 2* betraktas y som funktion av x ($y = y(x)$) och vid derivering används **kedjeregeln**.

Lös testproblem 19.

Avsnitt 9.11

Rita en funktion $y = f(x)$ och dess invers $y = f^{-1}(x)$ i samma koordinatsystem. Rita även tangenten till kurvan $y = f(x)$ i punkten (a, b) samt motsvarande tangent till kurvan $y = f^{-1}(x)$ i punkten (b, a) . Vilket sambandet råder mellan tangenternas riktningskoefficienter?

Funktionen f har inversen f^{-1} och $b = f(a)$. Om derivatan $f'(a) \neq 0$ så har den **inversa** funktionen f^{-1} i punkten b derivatan $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Nya standardderivator för de tre arcusfunktionerna är VIKTIGA.

Studera EXEMPEL 9.23 extra noggrant.

Lös testproblem 20 och 21 (VIKTIGT!).

Avsnitt 9.12 och 9.13

Studera EXEMPEL 9.25. Rita funktionen $y = \ln|x|$. Observera att funktionen $\ln x$ är definierad bara för $x > 0$ däremot funktionen $\ln|x|$ är definierad för alla $x \neq 0$.

Räkna alla testproblem.

Observera att **derivatan** för a^x och x^a får man genom omskrivning av funktionerna till uttrycken $e^{x \ln a}$ resp. $e^{a \ln x}$ och sedan tillämpa av derivatan för exponential- resp. logaritmfunktion.

Räkna testproblem 23 a, c, 24 b, c, d.

Avsnitt 9.14

Läs all TEXT och studera EXEMPLEN. Dessa visar hur man kan beräkna derivator för komplicerade uttryck med produkter och kvoter lite enklare. Räkna testproblem 25.

Avsnitt 9.15 Lär dig skilja på **absoluta fel** och **relativa fel**. Läs genom texten t.o.m. EXEMPEL 9.32.

LÄMPLIGA övningar: 9.1, 9.2 b, c, d, e, 9.3 b, c, 9.4 b, 9.5, 9.6 c, 9.8 a, 9.10 c, 9.12 a, b, 9.14, 9.16 a, 9.18, 9.22, 9.25 a, c, 9.26 b, c, 9.27 a, 9.28, 9.29, 9.34, 9.35.

EXTRA UPPGIFTER TILL KAP. 9

1. Låt $f(x) = x^2 + 4x$.

a) Vad betyder $f(3)$?

b) Vad betyder $f(3 + h)$?

c) Vad betyder $f(3 + h) - f(3)$?

d) Vad betyder $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$?

e) Beräkna $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$.

f) Vad betyder $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$?

g) Beräkna $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h}$.

2. Derivera med avseende på x :

a) $y = \sqrt{x}$,

b) $y = \sqrt{x^3}$,

c) $y = \sqrt{(x + 5)^3}$,

d) $y = \sqrt{(4x + 5)^3 + 7x}$,

e) $y = \sqrt{(4x^6 + 5)^3 + 7x}$,

f) $y = \sqrt{(4(3x^5 + 1)^6 + 5x^2)^3 + 7x}$,

g) Låt $x = x(t)$. Bestäm i uppgifterna a) – f) $\frac{dy}{dt}$.

FACIT TILL EXTRA UPPGIFTER TILL KAP. 9.

1.

- a) $f(3) = 21$ är funktionsvärdet för $x = 3$.
- b) $f(3 + h) = 21 + h^2 + 10h$ är funktionsvärdet för $x = 3 + h$,
- c) $f(3 + h) - f(3) = h^2 + 10h$ är tillväxt av funktionen då x ändras från 3 till $3 + h$,
- d) $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = h + 10$ är ändringskvoten (diffaranskvoten).
- e) $\frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = h + 10$,
- f) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3 + h) - f(3)}{h} = 10$ är derivatan för $f(x)$ i punkten $x = 3$,
- g) $f'(3) = 10$.

2.

- a) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
- b) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^3}} \cdot 3x^2$,
- c) $y' = \frac{1}{2\sqrt{(x+5)^3}} \cdot 3(x+5)^2$,
- d) $y' = \frac{1}{2\sqrt{(4x+5)^3 + 7x}} \cdot (3(4x+5)^2 \cdot 4 + 7)$,
- e) $y' = \frac{1}{2\sqrt{(4x^6+5)^3 + 7x}} \cdot (3(4x^6+5)^2 \cdot 24x^5 + 7)$,
- f) $y' = \frac{1}{2\sqrt{(4(3x^5+1)^6 + 5x^2)^3 + 7x}} \left(3(4(3x^5+1)^6 + 5x^2)^2 \cdot (24(3x^5+1)^5 \cdot 15x^4 + 10x) + 7 \right)$,
- g) Kedjeregeln ger att faktorn $\frac{dx}{dt}$ skall tillfogas efter varje derivata i uppg. a) – f).