UPPSALA UNIVERSITET
Matematiska institutionen
Pepe Winkler
tel. 018-471 32 89 .

Prov i matematik
Ingång 2
Matematik och statistik NV1.
2004-01-10

*Skrivtid: 9–14. Tillåtna hjälpmedel: Manuella skrivdon, miniräknare och utlånad formelsamling (**lämnas tillbaka** tillsammans med skrivningen). Maximal poäng på varje problem är 5. För att erhålla denna krävs att lösningarna är försedda med relevanta motiveringar. För betyg **G** krävs minst 18 poäng, för betyg **VG** krävs minst 28 poäng (bonus inräknat).*
LYCKA TILL *(och kom ihåg* **inrederivatan***)*

1. Använd Gausseliminationsmetoden (matrismetoden) för att lösa det linjära ekvationssystemet:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 2 \\ x + z = 3\,. \end{cases}$$

2. Bestäm alla vinklar v sådana att $0 \leq v \leq 2\pi$ och $\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2v\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + v\right)$.

3. Ekvationen $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 18x - 9 = 0$ har en rot $x_1 = 3i$. Visa detta och lös ekvationen fullständigt.

4. Beräkna: (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x}-1}{x}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{x}$.

5. Visa att $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan\frac{x-1}{x+1} + C$.
Vad kan sägas om sambandet mellan $\arctan\frac{x-1}{x+1}$ och $\arctan x$ för $x > -1$?

6. Beräkna: (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)}$, (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,dx$.

7. Som du säkert vet längden av en funktionskurva $y = f(x)$ i intervallet $[a\,,\,b]$ är

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx\,.$$

Använd denna formel och ekvationen för enhetscirkeln i första kvadranten $y = \sqrt{1-x^2}$ för att visa att omkretsen för enhetscirkeln är 2π. (Beräkna först omkretsen för kvartscirkeln.)

8. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' + y \cdot \tan x = y$, som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 2$.

Svar till tentamen i Matematik och statistik NV1. 2004-01-10

1. $x = 1\,,\ y = 0\,,\ z = 2\,.$

2. $v_1 = 0\,,\ v_2 = \dfrac{2}{3}\pi\,,\ v_3 = \dfrac{4}{3}\pi\,,\ v_4 = 2\pi$ och $v_5 = \dfrac{3}{2}\pi\,.$

3. $x_1 = 3i\,,\ x_2 = -3i\,,\ x_3 = 1 - \sqrt{2}$ och $x_4 = 1 + \sqrt{2}\,.$

4. (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{x} = 2\,,$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^{2x}-1}{x} = e^2 - 1\,,$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{2x}-1}{x} = 0\,.$

5. Funktionen $\arctan \dfrac{x-1}{x+1}$ och $\arctan x$ skiljes med en konstant. För $x > -1$ gäller:

$$\arctan \frac{x-1}{x+1} = \arctan x - \frac{\pi}{4}\,.$$

6. (a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C\,,$ (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\,,$

(c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x \cos(x^2)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$

7. Omkretsen är $\displaystyle 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx = 2\pi\,.$

8. $y(x) = 2e^x \cos x\,.$

Lösningar till tentamen i Matematik och statistik NV1. 2004-01-10

Lösning till problem 1.

Totalmatrisen för systemet är: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \overset{\frac{r_1+r_2+r_3}{2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} r_1 - r_2$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} r_3 - r_1 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} r_2 - r_3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$

Systemet har en enda lösningen: $x = 1$, $y = 0$ och $z = 2$.

Lösning till problem 2.

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2v\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + v\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + v\right)\right)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2v\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - v\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + 2v = \pm\left(\frac{\pi}{4} - v\right) + 2\pi \cdot n$. Alltså om $\frac{\pi}{4} + 2v = \frac{\pi}{4} - v + 2\pi \cdot n$ eller om $\frac{\pi}{4} + 2v = -\frac{\pi}{4} + v + 2\pi \cdot n$, dvs. om $v = \frac{2}{3}\pi \cdot n$ eller $v = -\frac{\pi}{2} + 2\pi \cdot n$.

Vinklarna ligger i intervallet $0 \leq v \leq 2\pi \Leftrightarrow v_1 = 0$, $v_2 = \frac{2}{3}\pi$, $v_3 = \frac{4}{3}\pi$, $v_4 = 2\pi$ eller $v_5 = \frac{3}{2}\pi$.

Lösning till problem 3.

$(3i)^4 - 2(3i)^3 + 8(3i)^2 - 18 \cdot 3i - 9 = 81 + 54i - 72 - 54i - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = 3i$ är en rot till ekvationen.

På grund av att alla koefficienter i ekvationen är reella,är även $x_2 = \bar{x_1} = -3i$ en rot till ekvationen. Enligt faktorsatsen är polynomet $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 18x - 9$ delbart med produkten $(x - 3i)(x + 3i) = x^2 + 9$. $x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 18x - 9 = (x^2 + 9)(x^2 - 2x - 1)$, alltså de övriga rötter är rötter till ekvationen $x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x_3 = 1 - \sqrt{2}$ och $x_4 = 1 + \sqrt{2}$.

Lösning till problem 4.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 = \{\text{Sätt } 2x = t\} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$.

Man kan även använda l'Hospitals regel: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{e^{2\cdot 1} - 1}{1} = e^2 - 1$,

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \{\text{Sätt } t = -x\} = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{e^{-2t} - 1}{-t} = \lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1 - e^{-2t}}{t} = 0$, ty

både $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{1}{t} = 0$ och $\lim\limits_{t\to +\infty} \frac{e^{-2t}}{t} = 0$.

Lösning till problem 5.

$$\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{x-1}{x+1} + C\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{x + 1 - (x - 1)}{(x + 1)^2} = \frac{2}{(x + 1)^2 + (x - 1)^2} = \frac{1}{x^2 + 1} .$$

Funktionen $\arctan\frac{x-1}{x+1} + C$ är en primitiv till $\frac{1}{1 + x^2}$. Även funktionen $\arctan x$ är en primitiv

till $\dfrac{1}{x^2+1}$. Alltså $\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$ och $\arctan x$ skiljer sig med en konstant.
$\arctan\dfrac{x-1}{x+1} = \arctan x + C$. Sätt in $x = 0$ och vi får att $\arctan(-1) = C$, dvs. $C = -\dfrac{\pi}{4}$.

Lösning till problem 6.

(a) $$\int \frac{dx}{(x-2)(x+3)} = \int \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right) dx = \frac{1}{5}(\ln|x-2| - \ln|x+3|) + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right| + C\,.$$

(b) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx = \{\,\text{Partiallintegrering}\,\} = \Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x\sin x\,dx =$$

$$\Big[x^2\sin x + 2x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx = \Big[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2\,,$$

(c) $$\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos(x^2)\,dx = \left\{\begin{array}{ccc} t & = & x^2 \\ dt & = & 2x\,dx \\ x\,dx & = & \frac{1}{2}\,dt \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos t\,dt = \left[\frac{\sin t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\,.$$

Lösning till problem 7.

Beräkna först längden av cirkelbåge i första kvadranten.

Om $f(x) = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ och $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{1+\dfrac{x^2}{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

alltså $l = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\arcsin x]_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}$.

Omkretsen för enhetscirkeln är då $4\cdot\dfrac{\pi}{2} = 2\pi$.

Lösning till problem 8.

$y' + y\tan x = y \Leftrightarrow y' + (\tan x - 1)y = 0$. Differentialekvationen är linjär med integrerande faktorn $e^{\int(\tan x-1)\,dx} = e^{-\ln(\cos x)-x} = \dfrac{e^{-x}}{\cos x}$.

Multiplicera differentialekvationen med integrerande faktorn. Vi får: $\left(y\cdot\dfrac{e^{-x}}{\cos x}\right)' = 0 \Leftrightarrow$

$y\cdot\dfrac{e^{-x}}{\cos x} = C \Leftrightarrow y = Ce^x\cos x$. Begynnelsevillkoret ger $2 = Ce^0\cos 0 = C$, alltså den sökta lösningen är $y(x) = 2e^x\cos x$.

Differentialekvationen $y' + y\cdot\tan x = y$ kan betraktas som en separabel ekvation, ty
$y' + y\cdot\tan x = y \Leftrightarrow y' = y(1-\tan x) \Leftrightarrow \dfrac{dy}{y} = (1-\tan x)\,dx \Leftrightarrow \ln y = x + \ln\cos x + K \Leftrightarrow$
$y = e^{x+\ln\cos x+K} = Ce^x\cos x$, där $C = e^K$.